MODÈLES MINIMAUX POUR LES DG-ALGÈBRES PSEUDO-COMPACTES COMPLÈTES (D'APRÈS VAN DEN BERGH)

SIMON RICHE

Introduction

Soit $\Bbbk$ un corps, et l une $\Bbbk$-algèbre séparable [1] de dimension finie.

L'objectif de ces notes est d'exposer la preuve d'un résultat de Van den Bergh ([VdB, Appendix A]) concernant l'existence et l'unicité d'un modèle minimal pour les l-dg-algèbres augmentées pseudo-compactes complètes. L'outil principal de cette preuve est le formalisme bar-cobar.

Le langage naturel pour traiter ces questions est la théorie des catégories de modèles. Pour simplifier l'exposition, nous avons cependant décidé de ne pas utiliser cette théorie dans ces notes, sauf pour quelques remarques dont la lecture peut être omise. L'annexe A rappelle les principales définitions de base de cette théorie, pour les lecteurs non spécialistes désireux de comprendre ces remarques.

Tous les énoncés pour lesquels aucune référence n'est indiquée sont démontrés dans [VdB].

Notations. On notera $l^e := l \otimes_{\Bbbk} l^{\mathrm{op}}$. Le produit tensoriel $\otimes$ sans indice désignera le produit tensoriel sur l.

On utilisera la règle des signes de Koszul : $(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g| \cdot |x|} f(x) \otimes g(y)$ si f, g sont des applications graduées et x, y des éléments homogènes.

On notera Σ le décalage cohomologique. Si x est un élément de X, on notera sx l'élément x vu dans ΣX.

1. Formalisme bar-cobar "classique"

Les références principales pour cette partie sont [Le, Po].

1.1. **Localisation des catégories.** Dans ce paragraphe, nous fixons un univers, et ne considérons que les catégories petites pour cet univers. Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont des catégories, nous noterons $\mathsf{Hom}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie, et S un sous-ensemble de l'ensembles des morphismes dans $\mathscr{C}$. Une *localisation de $\mathscr{C}$ par rapport à S* est la donnée d'une catégorie

Date: 02/11/2011.

1. Rappelons qu'une algèbre l sur $\Bbbk$, de dimension finie, est séparable si pour toute extension $\mathbb{K}$ de $\Bbbk$, l'algèbre $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} l$ est semi-simple. Si l est séparable, alors en particulier l est une algèbre de Frobenius symétrique (voir [Bo, p. 49]), donc il existe un isomorphisme de $l \otimes_{\Bbbk} l^{\mathrm{op}}$-modules $l \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(l, \Bbbk)$.

$S^{-1}\mathscr{C}$ et d'un foncteur $L_S : \mathscr{C} \to S^{-1}\mathscr{C}$ tels que pour toute catégorie $\mathscr{D}$, la composition avec L_S

$$\mathsf{Hom}(S^{-1}\mathscr{C}, \mathscr{D}) \ \to \ \mathsf{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle est la sous-catégorie donnée par les foncteurs $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tels que $F(s)$ est un morphisme inversible pour tout $s \in S$. Puisqu'elle est définie par une propriété universelle, une localisation, si elle existe, est unique à équivalence près, cette équivalence étant unique à un unique isomorphisme près.

L'existence d'une localisation est démontrée dans [GZ, §I.1] (voir aussi [To, §2.1]). Cette démonstration est constructive : les objects de $S^{-1}\mathscr{C}$ sont les mêmes que ceux de $\mathscr{C}$, et les morphismes de M à N sont les diagrammes

$$M \longrightarrow M_1 \xleftarrow{s_1} M_2 \longrightarrow \cdots \xleftarrow{s_{n-1}} M_n \longrightarrow N$$

où les s_i sont dans S, modulo certaines relations. Mais cette description est peu utile en pratique, car trop compliquée. Dans le cadre des catégories triangulées (et quand S vérifie de bonnes propriétés), la théorie de Verdier donne une description plus intéressante de la localisation. Mais les catégories qui nous intéressent dans ces notes (par exemple la catégorie des dg-algèbres) ne sont pas toutes triangulées. Un des intérêts de la théorie des modèles (due à Quillen, et dont nous rappelons quelques aspects en annexe) est de donner une description plus utile de la localisation dans un cadre qui s'applique à ces catégories.

1.2. Dg-algèbres et dg-cogèbres augmentées.

1.2.1. *Dg-algèbres.* On notera $\mathsf{Alg}(l)$ la catégorie des l-dg-algèbres augmentées. Ses objets sont les l-dg-algèbres A munies d'un morphisme de dg-algèbres $\varepsilon : A \to l$, qui définit une décomposition $A = l \oplus \overline{A}$, où $\overline{A} = \ker(\varepsilon)$ est stable par d_A. Les morphismes de A vers B sont les morphismes de dg-algèbres compatibles avec les augmentations ; en d'autres termes les morphismes qui envoient $\overline{A}$ dans $\overline{B}$. Notons que le foncteur $A \mapsto \overline{A}$ induit une équivalence de catégories de $\mathsf{Alg}(l)$ vers la catégorie des l-dg-algèbres non unitaires. On notera $\mu^{(n)} : \overline{A}^{\otimes n} \to \overline{A}$ le morphisme induit par la multiplication.

Si V est un l^e-module, l'algèbre tensorielle

$$T_l V \ := \ \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

munie de son produit habituel, est une algèbre augmentée, et son idéal d'augmentation est $\overline{T_l V} = \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$. Pour simplifier, on pose $\overline{T}_l V = \overline{T_l V}$. Si V est gradué, alors $T_l V$ peut être munie de la graduation telle que $\deg(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_n)$. Le résultat suivant est évident, et vrai dans un contexte plus général (voir [Le, Lemme 1.1.2.1]).

Lemme 1.2.1 (Propriété universelle de l'algèbre tensorielle). (1) *Soit A une l-algèbre augmentée graduée. L'application qui à un morphisme de l-algèbres augmentées graduées $T_l V \to A$ associe sa restriction $V \to \overline{A}$ est une bijection des morphismes de l-algèbres augmentées $T_l V \to A$ vers les morphismes de l^e-modules gradués $V \to \overline{A}$. Son* *inverse est l'application qui à $f : V \to \overline{A}$ associe le morphisme dont la restriction à $V^{\otimes n}$ est donnée par*

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{f^{\otimes n}} \overline{A}^{\otimes n} \xrightarrow{\mu^{(n)}} \overline{A}$$

pour tout $n \geq 1$.

(2) *L'application qui à une derivation de degré 1 de l-algèbre augmentée graduée $d : T_lV \to T_lV$ associe sa restriction $V \to \overline{T}_lV$ est une bijection des derivations de l-algèbre augmentée graduée de degré 1 vers les morphismes de l^e-modules gradués $V \to \overline{T}_lV$ de degré 1. Son inverse est l'application qui à $f : V \to \overline{T}_lV$ associe la dérivation dont la restriction à $V^{\otimes n}$ est donnée par*

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\sum_i \mathrm{Id}^{\otimes i} \otimes f \otimes \mathrm{Id}^{\otimes n-1-i}} \left(\overline{T}_lV\right)^{\otimes n} \xrightarrow{\mu^{(n)}} \overline{T}_lV$$

pour tout $n \geq 1$.

1.2.2. *Dg-cogèbres.* Dualement, nous noterons $\mathsf{Cog}(l)$ la catégorie des l-dg-cogèbres augmentées. (La différentielle d est supposée compatible avec l'augmentation, au sens où $d(1) = 0$ et $\varepsilon \circ d = 0$.) Soit C une telle dg-cogèbre. On notera $\overline{C}$ le conoyau de l'augmentation $\eta : l \to C$, de sorte qu'on a un isomorphisme naturel $C \cong l \oplus \overline{C}$. Notons $\Delta^{(n)} : \overline{C} \to \overline{C}^{\otimes n}$ le morphisme induit par la comultiplication, et soit $\overline{C}_{[n]} = \ker(\Delta^{(n)})$, de sorte qu'on a une filtration

$$\overline{C}_{[1]} \subset \overline{C}_{[2]} \subset \cdots \subset \overline{C}.$$

On dit que C est *cocomplète* si le morphisme naturel

$$\varinjlim_n \overline{C}_{[n]} \ \to\ \overline{C}$$

est un isomorphisme. On notera $\mathsf{Cogc}(l)$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Cog}(l)$ des dg-cogèbres cocomplètes.

Si V est un l^e-module, l'algèbre tensorielle T_lV a aussi une structure naturelle de cogèbre augmentée complète, où la comultiplication est définie par

$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \ = \ \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Son co-idéal d'augmentation est $\overline{T}_lV$. Si V est gradué, alors T_lV peut être muni de la graduation telle que $\deg(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_n)$. Pour $n \geq 1$, on notera $p_n : \overline{T}_lV \to V^{\otimes n}$ la projection naturelle. Le résultat suivant est évident, et vrai dans un contexte plus général (voir [Le, Lemme 1.1.2.2]).

Lemme 1.2.2 (Propriété universelle de la cogèbre tensorielle)**.** (1) *Soit C une l-cogèbre augmentée graduée cocomplète. L'application qui à un morphisme de l-cogèbres augmentées graduées $\phi : C \to T_lV$ associe la composition $\overline{C} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{T}_lV \xrightarrow{p_1} V$ est une bijection des morphismes de l-cogèbres augmentées graduées $C \to T_lV$ vers les morphismes de l^e-modules gradués $\overline{C} \to V$. Son inverse est l'application qui à*

$f : \overline{C} \to V$ associe le morphisme $C \to T_l V$ tel que la composée $\overline{C} \to \overline{T}_l V \xrightarrow{p_n} V^{\otimes n}$ est donnée par

$$\overline{C} \xrightarrow{\Delta^{(n)}} \overline{C}^{\otimes n} \xrightarrow{f^{\otimes n}} V^{\otimes n}$$

pour tout $n \geq 1$.

(2) *L'application qui à une codérivation de l-cogèbre graduée $d : T_l V \to T_l V$ de degré 1 compatible avec l'augmentation associe la composition $\overline{T}_l V \xrightarrow{d} \overline{T}_l V \xrightarrow{p_1} V$ est une bijection des codifférentielles de l-algèbre graduée de degré 1 compatibles avec l'augmentation vers les morphismes de l^e-modules gradués $\overline{T}_l V \to V$ de degré 1. Son inverse est l'application qui à $f : \overline{T}_l V \to V$ associe la codérivation d telle que la composition $\overline{T}_l V \xrightarrow{\overline{d}} \overline{T}_l V \xrightarrow{p_n} V^{\otimes n}$ est donnée par*

$$\overline{T}_l V \xrightarrow{\Delta^{(n)}} \big(\overline{T}_l V\big)^{\otimes n} \xrightarrow{\sum_i \mathrm{Id}^{\otimes i} \otimes f \otimes \mathrm{Id}^{\otimes n-1-i}} V^{\otimes n}$$

pour tout $n \geq 1$

Remarque 1.2.3. Dans l'énoncé (1), la condition que C est cocomplète assure que pour tout $c \in \overline{C}$, $\Delta^{(n)}(c) = 0$ pour n assez grand, et donc $\phi(c)$ sera bien dans $T_l V \subset \prod_{n\geq 0} V^{\otimes n}$.

1.3. **Constructions bar et cobar.**

1.3.1. *Définitions.* Soit A un objet de $\mathsf{Alg}(l)$. La *construction bar* de A est la dg-cogèbre augmentée $BA := T_l(\Sigma\overline{A})$, où la codifferentielle d est telle que les composées $d_n : (\Sigma\overline{A})^{\otimes n} \hookrightarrow T(\Sigma\overline{A}) \xrightarrow{d} T(\Sigma\overline{A}) \xrightarrow{p_1} \Sigma\overline{A}$ sont données par

$$\begin{aligned} d_1(sa) &= -sd(a) \\ d_2(sa \otimes sb) &= (-1)^{|a|} s(ab) \\ d_n &= 0 \quad \text{si } n \geq 3 \end{aligned}$$

pour $a, b \in \overline{A}$ (voir Lemme 1.2.2). Cette construction définit un foncteur

$$B : \mathsf{Alg}(l) \to \mathsf{Cogc}(l).$$

Soit maintenant C un objet de $\mathsf{Cog}(l)$. La *construction cobar* de C est la dg-algèbre augmentée $\Omega C := T_l(\Sigma^{-1}\overline{C})$, où la différentielle est telle que

$$d(s^{-1}c) = -s^{-1}d(c) + (-1)^{|c_{(1)}|}(s^{-1}c_{(1)} \otimes s^{-1}c_{(2)})$$

pour $c \in \overline{C}$ (voir Lemme 1.2.1). Cette construction définit un foncteur

$$\Omega : \mathsf{Cog}(l) \to \mathsf{Alg}(l).$$

1.3.2. *Cochaînes tordantes.* On peut donner une interprétation plus intrinsèque de ces constructions, comme suit. Soient A un objet de $\mathsf{Alg}(l)$, et C un objet de $\mathsf{Cog}(l)$. Alors le complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{l^e}(\overline{C}, \overline{A})$$

peut être muni d'un produit de convolution $*$, tel que $f * g$ est la composée

$$\overline{C} \xrightarrow{\Delta^{(2)}} \overline{C} \otimes \overline{C} \xrightarrow{f\otimes g} \overline{A} \otimes \overline{A} \xrightarrow{\mu^{(2)}} \overline{A}.$$

Une *cochaine tordante* est un élément τ de $\mathrm{Hom}_{l^e}(\overline{C},\overline{A})$, de degré 1, qui vérifie l'équation de Maurer–Cartan

$$d(\tau)+\tau*\tau=0.$$

On note $\mathsf{Tw}(C,A)$ le $\Bbbk$-espace vectoriel des cochaines tordantes.

Alors il découle du Lemme 1.2.2 que, si A est dans $\mathsf{Alg}(l)$, le foncteur

$$\mathsf{Tw}(-,A):\mathsf{Cogc}(l)\to\mathsf{Vect}(\Bbbk)$$

est représentable par BA. De même, il découle du Lemme 1.2.1 que, si C est dans $\mathsf{Cog}(l)$ le foncteur

$$\mathsf{Tw}(C,-):\mathsf{Alg}(l)\to\mathsf{Vect}(\Bbbk),$$

est représentable par ΩC. En particulier, les foncteurs $\Omega:\mathsf{Cogc}(l)\to\mathsf{Alg}(l)$ et $B:\mathsf{Alg}(l)\to\mathsf{Cogc}(l)$ sont adjoints ; il existe donc des morphismes naturels

$$\Omega BA\to A,\qquad C\to B\Omega C \tag{1.3.1}$$

pour A dans $\mathsf{Alg}(l)$ et C dans $\mathsf{Cogc}(l)$.

1.3.3. *Équivalences faibles.* Nous appellerons *équivalences faibles dans la catégorie* $\mathsf{Alg}(l)$ les morphismes qui sont des quasi-isomorphismes, et nous noterons $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}(l))$ la localisation de la catégorie $\mathsf{Alg}(l)$ par rapport aux équivalences faibles.

Nous appellerons *équivalences faibles dans* $\mathsf{Cogc}(l)$ les morphismes $f:C\to C'$ tels que $\Omega f:\Omega C\to\Omega C'$ est un quasi-isomorphisme de dg-algèbres. (Notons que toute équivalence faible est un quasi-isomorphisme, mais que la réciproque n'est pas vrai, voir [Le, §1.3.5].) Nous noterons $\mathsf{Ho}(\mathsf{Cogc}(l))$ la localisation de la catégorie $\mathsf{Cogc}(l)$ par rapport aux équivalences faibles.

Le résultat suivant est contenu dans [Le, Théorème 1.3.1.2].

Théorème 1.3.2. *Les foncteurs Ω et B induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre* $\mathsf{Ho}(\mathsf{Alg}(l))$ *et* $\mathsf{Ho}(\mathsf{Cogc}(l))$. *En particulier, les morphismes* (1.3.1) *sont des équivalences faibles.*

Remarque 1.3.3.

(1) Hinich a démontré que la catégorie $\mathsf{Alg}(l)$ peut être munie d'une structure de catégorie de modèles telle que
   - les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes ;
   - les fibrations sont les morphismes surjectifs

   (voir [Le, 1.3.1.1] ou [Po, §9.1]). Pour cette structure, tous les objets sont fibrants.

(2) De même, Lefèvre a démontré qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur $\mathsf{Cogc}(l)$ telle que
   - les équivalences faibles sont les morphismes $f:C\to C'$ tels que $\Omega f:\Omega C\to\Omega C'$ est un quasi-isomorphisme ;
   - les cofibrations sont les morphismes injectifs

   (voir [Le, Théorème 1.3.1.2]). Pour cette structure, tous les objets sont cofibrants.

(3) Il est démontré dans [Le, Proposition 1.3.5.1] que si C et C' sont des objets de $\mathsf{Cogc}(l)$ concentrés en degrés ≥ 0, un morphisme $f:C\to C'$ est une équivalence faible ssi c'est un quasi-isomorphisme.

2. Existence d'un modèle minimal

2.1. Algèbres et cogèbres pseudo-compactes. Un $\Bbbk$-espace vectoriel topologique est dit *pseudo-compact* s'il est complet et si sa topologie est engendrée par des sous-espaces vectoriels de codimension finie. On notera $\mathsf{PC}(\Bbbk)$ la catégorie des tels espaces vectoriels (les morphismes étant supposés continus). En particulier $\Bbbk$, muni de la topologie discrète, est un objet de $\mathsf{PC}(\Bbbk)$. Il existe des anti-équivalences quasi-inverses l'une de l'autre

$$\mathbb{D} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{Vect}(\Bbbk) & \to & \mathsf{PC}(\Bbbk) \\ V & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk) \end{array} \right. \qquad \mathbb{D} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{PC}(\Bbbk) & \to & \mathsf{Vect}(\Bbbk) \\ V & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathsf{PC}(\Bbbk)}(V, \Bbbk) \end{array} \right.$$

où, pour V dans $\mathsf{Vect}(\Bbbk)$, la topologie sur $\mathbb{D}(V)$ est engendrée par les noyaux de $\mathbb{D}(V) \to \mathbb{D}(V')$, où V' parcourt les sous-espaces vectoriels de V de dimension finie.

La catégorie $\mathsf{PC}(\Bbbk)$ est munie d'une structure monoidale, où pour V et W dans $\mathsf{PC}(\Bbbk)$ on pose

$$V \otimes W \ := \ \mathbb{D}(\mathbb{D}(V) \otimes_{\Bbbk} \mathbb{D}(W)).$$

(Il s'agit donc d'un "produit tensoriel complété".)

De même, on définit la catégorie $\mathsf{PCGr}(\Bbbk)$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels pseudo-compacts gradués comme les suites $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathsf{PC}(\Bbbk)$. On notera cette suite $\prod_i V_i$. Cette catégorie est naturellement anti-équivalente à la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués. La structure monoidale sur cette catégorie est définie en conjugant par $\mathbb{D}$ le produit tensoriel des espaces vectoriels gradués. De façon plus concrète on a

$$(V_i)_i \otimes (W_j)_j \ = \ \big(\prod_{i+j=k} V_i \otimes_{\Bbbk} W_j \big)_k. \tag{2.1.1}$$

On définit ensuite les algèbres et modules pseudo-compacts comme étant les algèbres et modules dans la catégorie $\mathsf{PC}(\Bbbk)$. Comme la multiplication est supposée continue, pour se donner une structure d'algèbre pseudo-compacte sur un objet A de $\mathsf{PC}(\Bbbk)$, il suffit de se donner une multiplication $A \otimes_{\Bbbk} A \to A$ associative et distributive, où $\otimes_{\Bbbk}$ est le produit tensoriel habituel. De même, on définit les dg-algèbres, dg-modules, dg-cogèbres, dg-comodules pseudo-compacts en utilisant la catégorie $\mathsf{PCGr}(\Bbbk)$. Il s'agit des notions duales (au sens de $\mathbb{D}$) des notions de dg-cogèbre, dg-comodule, dg-algèbre, dg-module sur $\Bbbk$.

On notera $\mathsf{PCAlg}(l)$, respectivement $\mathsf{PCAlgc}(l)$, la catégorie des dg-algèbres augmentées pseudo-compactes, respectivement des dg-algèbres augmentées pseudo-compactes complètes. Il s'agit des catégories duales des catégories $\mathsf{Cog}(l)$, respectivement $\mathsf{Cogc}(l)$. On définit de même la catégorie $\mathsf{PCCog}(l)$.

2.2. Formalisme bar-cobar dans le cas pseudo-compact. Le formalisme bar-cobar dans le cas pseudo-compact est obtenu simplement en "dualisant" le formalisme classique (voir §1.3). Plus précisément, si A, respectivement C, est un objet de $\mathsf{PCAlg}(l)$, respectivement $\mathsf{PCCog}(l)$, on pose

$$B^{\mathsf{PC}} A \ = \ \mathbb{D} \Omega \mathbb{D} A,$$
$$\Omega^{\mathsf{PC}} C \ = \ \mathbb{D} B \mathbb{D} C.$$

Si V est un objet de $\mathsf{PCGr}(l^e)$, son algèbre tensorielle est définie par la formule

$$\widehat{T}_l V \;:=\; \prod_{n\geq 0} V^{\otimes n}.$$

(Ainsi, la composante de degré n de $\widehat{T}_l V$ est le produit des composantes de degré n dans tous les $V^{\otimes n}$, ces derniers étant définis par (2.1.1). De façon équivalente on a $\widehat{T}_l V = \mathbb{D}(T_l(\mathbb{D}V))$.) Il s'agit d'une l-algèbre et l-cogèbre pseudo-compacte graduée augmentée. Alors on a $B^{\mathsf{PC}}A = \widehat{T}_l(\Sigma\overline{A})$ et $\Omega^{\mathsf{PC}}C = \widehat{T}_l(\Sigma^{-1}\overline{C})$, où les différentielles sont définies comme dans la partie 1.

Les foncteurs

$$B^{\mathsf{PC}} : \mathsf{PCAlgc}(l) \to \mathsf{PCCog}(l), \quad \Omega^{\mathsf{PC}} : \mathsf{PCCog}(l) \to \mathsf{PCAlgc}(l)$$

sont adjoints. En particulier, pour A dans $\mathsf{PCAlgc}(l)$ et C dans $\mathsf{PCCog}(l)$ il existe des morphismes d'adjonction

$$\Omega^{\mathsf{PC}}B^{\mathsf{PC}}A \to A, \quad C \to B^{\mathsf{PC}}\Omega^{\mathsf{PC}}C. \tag{2.2.1}$$

On appellera *équivalences faibles dans la catégorie* $\mathsf{PCAlgc}(l)$, respectivement $\mathsf{PCCog}(l)$, les morphismes f tels que $\mathbb{D}f$ est une équivalence faible dans $\mathsf{Cogc}(l)$, respectivement $\mathsf{Alg}(l)$. De façon équivalente, les équivalences faibles dans $\mathsf{PCCog}(l)$ sont les quasi-isomorphismes. Pour $\mathsf{PCAlgc}(l)$, un morphisme f est une équivalence faible ssi $B^{\mathsf{PC}}f$ est un quasi-isomorphisme. On notera $\mathsf{Ho}(\mathsf{PCAlgc}(l))$ et $\mathsf{Ho}(\mathsf{PCCog}(l))$ les localisations correspondantes. Alors les foncteurs Ω^{PC} et B^{PC} induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{PCAlgc}(l)) \;\cong\; \mathsf{Ho}(\mathsf{PCCog}(l)).$$

En particulier, les morphismes dans (2.2.1) sont des équivalences faibles.

Remarque 2.2.2. On peut équiper la catégorie $\mathsf{PCAlgc}(l)$, respectivement $\mathsf{PCCog}(l)$, de la structure de catégorie de modèles duale de celle de $\mathsf{Cogc}(l)$, respectivement $\mathsf{Alg}(l)$.

2.3. Algèbres A_∞ et modèle minimal.

2.3.1. *Définitions.* Une *l-algèbre A_∞* (non-unitaire) est un l^e-module gradué A muni d'applications

$$m_n : A^{\otimes n} \to A$$

de degré $2-n$ pour tout $n \geq 1$, qui vérifient les relations

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{rs+t} m_{r+1+t} \circ (\mathrm{Id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{Id}^{\otimes t}) = 0$$

pour tout $n \geq 1$.

Un *morphisme de l-algèbres A_∞* est une collection de morphismes de l^e-modules

$$A^{\otimes n} \to B$$

de degré $1-n$ pour tout $n \geq 1$, qui vérifient certaines relations (voir [Le, §1.2.1]). On peut définir la composition des morphismes de l-algèbres A_∞, de sorte qu'on obtient une catégorie $\mathsf{Alg}^{\bullet}_{\infty}(l)$ (voir [Le, §1.2.2]).

En particulier, les relations pour les applications m_n impliquent que m_1 est une différentielle sur A (i.e. $m_1 \circ m_1 = 0$), et une dérivation pour l'application

m_2 (i.e. $m_1 \circ m_2 = m_2 \circ (m_1 \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes m_1)$). On considérera m_2 comme une multiplication. Elle n'est pas associative en général, mais l'application induite par m_2 sur la cohomologie $H^\bullet(A, m_1)$ est associative (de sorte que m_2 est associative si $m_1 = 0$). En particulier, $H^\bullet(A, m_1)$ est une l-algèbre graduée (non unitaire). Tout morphisme de l-algèbres A_∞ $f : A \to B$ induit un morphismes d'algèbres graduées $H^\bullet(f) : H^\bullet(A) \to H^\bullet(B)$. On dira que f est un *quasi-isomorphisme* si $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme.

2.3.2. *Construction bar.* La donnée d'une structure de l-algèbre A_∞ sur A est équivalente à la donnée d'une l-codérivation de degré 0 et de carré nul sur $T_l(\Sigma A)$, compatible avec l'augmentation. En effet, introduisons les isomorphismes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{l^e}(A^{\otimes n}, A) & \to & \mathrm{Hom}_{l^e}((\Sigma A)^{\otimes n}, \Sigma A) \\ m_n & \mapsto & b_n := -s \circ m_n \circ (s^{-1})^{\otimes n} \end{array} \right.$$

pour tout $n \geq 1$. La collection $(b_n)_{n \geq 1}$ définit, d'après le Lemme 1.2.2, une codérivation b sur l'algèbre tensorielle $T_l(\Sigma A)$ compatible avec l'augmentation et, réciproquement, toute telle codérivation définit une famille d'applications $(m_n)_{n \geq 1}$. Alors on a le résultat suivant, dû à Stasheff (voir [Le, Lemme 1.2.2.1]).

Lemme 2.3.1. *Les applications $(m_n)_{n \geq 1}$ munissent A d'une structure d'algèbre A_∞ ssi la codérivation b vérifie $b \circ b = 0$.*

En particulier, si A est une l-algèbre A_∞ (non unitaire), alors on a une structure naturelle de l-dg-cogèbre augmentée cocomplète sur $T_l(\Sigma A)$. On notera cette dg-cogèbre $\widetilde{B}A$, et on l'appellera la *construction bar* de A.

De façon analogue, à un morphisme de l-algèbres A_∞ $f : A \to A'$ on peut associer un morphisme de l-dg-cogèbres $\widetilde{B}f : \widetilde{B}A \to \widetilde{B}A'$, et inversement. On obtient ainsi un foncteur

$$\widetilde{B} : \mathsf{Alg}^\bullet_\infty(l) \to \mathsf{Cogc}(l)$$

qui est pleinement fidèle (voir [Le, p. 29]).

2.3.3. *Quelques résultats généraux.* Nous aurons besoin de deux résultats "classiques" de la théorie des algèbres A_∞. Tout d'abord, le résultat suivant est prouvé dans [Le, Corollaire 1.4.1.4].

Proposition 2.3.2. *Soit $(A, m_1, m_2, \cdots)$ un objet de $\mathsf{Alg}^\bullet_\infty(l)$. Il existe une structure de l-algèbre A_∞ sur $H^\bullet(A)$, dont on notera $m'_1, m'_2, \cdots$ les applications, telle que $m'_1 = 0$ et m'_2 est l'application induite par m_2, et un quasi-isomorphisme de l-algèbres A_∞ $H^\bullet(A) \to A$ qui induit l'identité en cohomologie.*

Une telle structure sur $H^\bullet(A)$ sera appelée un *modèle minimal* pour A. La structure A_∞ décrite dans la proposition est unique à isomorphisme près, mais n'est pas canonique.

Nous aurons besoin également du résultat suivant, démontré dans [Le, Corollaire 1.3.1.3].

Lemme 2.3.3. *Soient A et A' deux objets de $\mathsf{Alg}^\bullet_\infty(l)$. Si $f : A \to A'$ est un quasi-isomorphisme, il existe un quasi-isomorphisme $g : A' \to A$ qui induit l'inverse de $H^\bullet(f)$ en cohomologie.*

D'après ce lemme, la relation sur $\mathsf{Alg}^{\bullet}_{\infty}(l)$ définie par : "$A \sim A'$ ssi il existe un quasi-isomorphisme de l-algèbres A_∞ $A \to A'$" est une relation d'équivalence. On dira que A et A' sont quasi-isomorphes si elles sont dans la même classe d'équivalence pour cette relation.

Remarque 2.3.4. Pour démontrer le Lemme 2.3.3, on utilise tout d'abord que le foncteur $\widetilde{B}$ est pleinement fidèle. Puis l'argument principal est le fait que si A est dans $\mathsf{Alg}^{\bullet}_{\infty}(l)$, l'objet $\widetilde{B}A$ de $\mathsf{Cogc}(l)$ est fibrant (et également cofibrant, comme tout objet de $\mathsf{Cogc}(l)$), ce qui permet d'appliquer la Proposition A.2.1.

2.3.4. *Algèbres A_∞ augmentées.* On définit de façon naturelle la notion de l-algèbre A_∞ augmentée : un tel objet A est une l-algèbre A_∞ munie d'une décomposition $A = l \oplus \overline{A}$ telle que $\overline{A}$ est une sous-l-algèbre A_∞, et telle que $m_1(1) = 0$, $m_2(1, a) = m_2(a, 1) = a$, $m_n(\cdots, 1, \cdots) = 0$ si $n \geq 3$. On définit de même les morphismes de l-algèbres A_∞ augmentées, et on note $\mathsf{Alg}_\infty(l)$ la catégorie obtenue, qui est naturellement équivalente à la catégorie $\mathsf{Alg}^{\bullet}_{\infty}(l)$. On notera BA la l-dg-cogèbre augmentée $\widetilde{B}\overline{A}$. Notons que la donnée de la codifférentielle sur BA est équivalente à la donnée de la structure de l-algèbre A_∞ augmentée sur A. De même que ci-dessus, on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$B : \mathsf{Alg}_\infty(l) \to \mathsf{Cogc}(l). \tag{2.3.5}$$

Notons que la catégorie $\mathsf{Alg}(l)$ s'identifie à une sous-catégorie (non pleine !) de $\mathsf{Alg}_\infty(l)$. De ce point de vue, la construction bar pour les algèbres A_∞ prolonge la construction bar pour les dg-algèbres (ce qui justifie l'emploi du même symbole). On a donc obtenu le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Alg}_\infty(l) \arrow[dr, hook, "B"] & \\
\mathsf{Alg}(l) \arrow[ur] \arrow[rr, shift left, "B"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathbb{D}"', "\wr"] & & \mathsf{Cogc}(l) \arrow[ll, shift left, "\Omega"] \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"', "\mathbb{D}"] \\
\mathsf{PCCog}(l) \arrow[rr, shift left, "\Omega^{\mathsf{PC}}"] & & \mathsf{PCAlgc}(l). \arrow[ll, shift left, "B^{\mathsf{PC}}"]
\end{tikzcd}$$

2.3.5. *Construction bar et quasi-isomorphismes.*

Lemme 2.3.6. *Pour tout quasi-isomorphisme de l-algèbres A_∞ augmentées $A \to A'$, le morphisme $BA \to BA'$ est une équivalence faible dans $\mathsf{Cogc}(l)$.*

Démonstration. Commençons par rappeler un fait général. Soit A une l-algèbre A_∞ augmentée. Par adjonction (voir (1.3.1)) appliquée à BA, il existe un morphisme $BA \to B\Omega BA$ dans $\mathsf{Cogc}(l)$. Comme B est pleinement fidèle (voir (2.3.5)), ce morphisme définit un morphisme dans $\mathsf{Alg}_\infty(l)$

$$A \to \Omega BA. \tag{2.3.7}$$

(Ici ΩBA est un objet de $\mathsf{Alg}(l)$, vue comme sous-catégorie de $\mathsf{Alg}_\infty(l)$.) D'après [Le, Lemme 2.3.4.3], ce morphisme est un quasi-isomorphisme.

Revenons maintenant à la preuve du lemme. On doit démontrer que le morphisme de dg-algèbres $\Omega BA \to \Omega BA'$ est un quasi-isomorphisme. Ce morphisme s'inscrit dans le diagramme commutatif d'objets de $\mathsf{Alg}_\infty(l)$ suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ \Omega BA \arrow[r] & \Omega BA'. \end{tikzcd}$$

Le morphisme sur la première ligne est un quasi-isomorphisme par hypothèse, et les morphismes verticaux le sont aussi d'après le fait rappelé au début de la preuve. Il en est donc de même pour le morphisme sur la deuxième ligne. □

2.4. **Modèles minimaux pour les objets de $\mathsf{PCAlgc}(l)$.** Si A est un objet de $\mathsf{PCAlgc}(l)$, on définit son *dual de Koszul* par la formule

$$A^! \ := \ \Omega \mathbb{D} A.$$

Il s'agit donc d'un objet de $\mathsf{Alg}(l)$ (non pseudo-compact).

Proposition 2.4.1. *Soit A dans $\mathsf{PCAlgc}(l)$. Il existe une équivalence faible*

$$\Omega^{\mathsf{PC}} \mathbb{D} A^! = \mathbb{D} B A^! \ \to \ A.$$

De plus, on peut remplacer $A^!$ par toute l-algèbre A_∞ augmentée quasi-isomorphe à $A^!$.

Démonstration. On a

$$\Omega^{\mathsf{PC}} \mathbb{D} A^! = \Omega^{\mathsf{PC}} B^{\mathsf{PC}} A.$$

En appliquant la première équivalence faible dans (2.2.1), on obtient l'équivalence faible

$$\Omega^{\mathsf{PC}} \mathbb{D} A^! \ \to \ A.$$

Le deuxième énoncé de la proposition est une conséquence immédiate du Lemme 2.3.6 (voir également le Lemme 2.3.3). □

On obtient finalement comme corollaire de ce résultat l'existence d'un modèle minimal.

Théorème 2.4.2. *Soit A dans $\mathsf{PCAlgc}(l)$. Il existe un objet W de $\mathsf{PCGr}(l^e)$, une différentielle d sur $\widehat{T}_l W$ telle que $d(W) \subset \widehat{T}_l^{\geq 2} W$, et une équivalence faible*

$$(\widehat{T}_l W, d) \ \to \ A$$

dans $\mathsf{PCAlgc}(l)$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe de la Proposition 2.4.1 : il suffit de choisir W tel que $l \oplus \Sigma^{-1} \mathbb{D} W$ est un modèle minimal pour $A^!$, vu comme objet de $\mathsf{Alg}_\infty(l)$. □

3. Unicité du modèle minimal

3.1. **Équivalences faibles pour les dg-modules et dg-comodules.**

3.1.1. *Cadre classique.* Soit A un objet de $\mathsf{Alg}(l)$, et soit $\mathsf{DGMod}(A)$ la catégorie des A-dg-modules. On appellera *équivalence faible dans* $\mathsf{DGMod}(A)$ tout quasi-isomorphisme de dg-modules. On notera $\mathsf{Ho}(\mathsf{DGMod}(A))$ la localisation de $\mathsf{DGMod}(A)$ par rapport aux équivalences faibles.

Si C est un objet de $\mathsf{Cogc}(l)$, on notera $\mathsf{DGComod}(C)$ la catégorie des C-dg-comodules. On appellera *équivalence faible dans* $\mathsf{DGComod}(C)$ tout morphisme dont le cône est acyclique, c'est-à-dire appartient à la plus petite sous-catégorie triangulée de la catégorie homotopique des C-dg-comodules qui contient les complexes totaux de suites exactes courtes et est stable par les sommes directes arbitraires. En particulier une équivalence faible est un quasi-isomorphisme, mais la réciproque est fausse en général (sauf sous certaines conditions sur les degrés, voir [VdB, Lemma A.2.1]). On notera $\mathsf{Ho}(\mathsf{DGComod}(C))$ la localisation de $\mathsf{DGComod}(C)$ par rapport aux équivalences faibles.

Remarque 3.1.1. Les équivalences faibles considérées ci-dessus font partie de structures de catégories de modèles sur les catégories correspondante, qu'on peut définir dans un cadre plus général.

(1) Soit A une dg-algèbre. Alors il existe une structure de catégorie de modèles sur $\mathsf{DGMod}(A)$ telle que
   - les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes ;
   - les fibrations sont les morphismes surjectifs.

   On pourra consulter [Po, §8.1] pour une preuve du fait que ces données définissent une telle structure, et pour une description des cofibrations.

(2) Soit maintenant C une $\Bbbk$-dg-cogèbre. Alors il existe une structure de catégorie de modèles sur $\mathsf{DGComod}(C)$ telle que
   - les équivalences faibles sont les morphismes dont le cône est acyclique ;
   - les fibrations sont les morphismes surjectifs dont le noyau est injectif comme C-comodule gradué (c'est-à-dire quand on oublie la différentielle) ;
   - les cofibrations sont les morphismes injectifs.

   L'existence d'une telle structure est démontrée dans [Po, §8.2].

3.1.2. *Cadre pseudo-compact.* Si A est un objet de $\mathsf{PCAlgc}(l)$, on notera $\mathsf{PCDGMod}(A)$ la catégorie des A-dg-modules pseudo-compacts. Cette catégorie est anti-équivalente (via $\mathbb{D}$) à la catégorie $\mathsf{DGComod}(\mathbb{D}A^{\mathrm{op}})$. On dira qu'un morphisme f est *une équivalence faible dans* $\mathsf{PCDGMod}(A)$ si $\mathbb{D}f$ est une équivalence faible dans $\mathsf{DGComod}(\mathbb{D}A^{\mathrm{op}})$. On notera $\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A))$ la localisation de $\mathsf{PCDGMod}(A)$ par rapport aux équivalences faibles. Cette catégorie est anti-équivalente à $\mathsf{Ho}(\mathsf{DGComod}(\mathbb{D}A^{\mathrm{op}}))$.

De même, si C est un objet de $\mathsf{PCCog}(l)$, on notera $\mathsf{PCDGComod}(C)$ la catégorie des dg-comodules pseudo-compacts sur C. Cette catégorie est anti-équivalente (via $\mathbb{D}$) à la catégorie $\mathsf{DGMod}(\mathbb{D}C^{\mathrm{op}})$. On dira qu'un morphisme f est *une équivalence faible dans* $\mathsf{PCDGComod}(C)$ si $\mathbb{D}f$ est une équivalence faible dans $\mathsf{DGMod}(\mathbb{D}C^{\mathrm{op}})$ ou, de façon équivalente, si f est un quasi-isomorphisme. On notera $\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGComod}(C))$ la localisation de $\mathsf{PCDGComod}(C)$ par rapport aux équivalences faibles. Cette catégorie est anti-équivalente à $\mathsf{Ho}(\mathsf{DGMod}(\mathbb{D}C^{\mathrm{op}}))$.

Remarque 3.1.2. Comme précédemment, les équivalences faibles considérées ici font partie de structures de catégories de modèles, qu'on peut obtenir en dualisant les structure considérées précédemment sur $\mathsf{DGComod}(\mathbb{D}A^{\mathrm{op}})$ et $\mathsf{DGMod}(\mathbb{D}C^{\mathrm{op}})$ (voir §3.1.1).

3.2. **Dualité de Koszul.**

3.2.1. *Cadre classique.* Soit C un objet de $\mathsf{Cogc}(l)$, et notons $A = \Omega C$. En particulier, il existe une cochaine tordante naturelle $\tau \in \mathsf{Tw}(C, A)$ (voir §1.3.2). Si M est un objet de $\mathsf{DGComod}(C^{\mathrm{op}})$ et N un objet de $\mathsf{DGMod}(A)$, on note $M \otimes_\tau N$ le complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels $M \otimes_l N$, muni de la différentielle $d + \delta_\tau$, où

$$\delta_\tau = (\mathrm{Id}_M \otimes \mu_N) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}_N) \circ (\Delta_M \otimes \mathrm{Id}),$$

où $\mu_N : A \otimes N \to N$ est l'action et $\Delta_M : M \to M \otimes C$ la coaction. Cette construction permet de définir un foncteur

$$R : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{DGMod}(A) & \to & \mathsf{DGComod}(C) \\ N & \mapsto & C \otimes_\tau N \end{array} \right. .$$

De même, si M est un objet de $\mathsf{DGComod}(C)$ et N un objet de la catégorie $\mathsf{DGMod}(A^{\mathrm{op}})$, on peut définir un complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels $N \otimes_\tau M$ en ajoutant à la différentielle ordinaire un terme faisant intervenir τ et les structure de module et comodule. On obtient ainsi un foncteur

$$L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathsf{DGComod}(C) & \to & \mathsf{DGMod}(A) \\ M & \mapsto & A \otimes_\tau N \end{array} \right. .$$

Les foncteurs L et R sont adjoints. De plus, on a le résultat suivant, prouvé dans [Po, §6.4].

Théorème 3.2.1. *Soit C dans $\mathsf{Cogc}(l)$, et $A = \Omega C$.*

Les foncteurs L et R induisent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre $\mathsf{Ho}(\mathsf{DGComod}(C))$ et $\mathsf{Ho}(\mathsf{DGMod}(A))$.

3.2.2. *Cadre pseudo-compact.* Soit A un objet de $\mathsf{PCAlgc}(l)$, et soit $C = B^{\mathsf{PC}}A$. Alors, de même que ci-dessus, on peut définir des foncteurs

$$R^{\mathsf{PC}} : \mathsf{PCDGMod}(A) \to \mathsf{PCDGComod}(C)$$

(en dualisant le foncteur L défini à partir de la cogèbre $\mathbb{D}A^{\mathrm{op}}$) et

$$L^{\mathsf{PC}} : \mathsf{PCDGComod}(C) \to \mathsf{PCDGMod}(A)$$

(en dualisant R), qui induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGComod}(C)) \ \cong\ \mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A)).$$

3.2.3. *Description de $A^!$.* Comme ci-dessus, soit A un objet de $\mathsf{PCAlgc}(l)$. Pour M et N dans $\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A))$, on notera

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M, N) \ :=\ \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A))}(M, \Sigma^n N).$$

Rappelons qu'on a posé $A^! = \Omega \mathbb{D} A$ (voir §2.4). En utilisant la dualité de Koszul on obtient la description suivante.

Proposition 3.2.2. *Il existe un isomorphisme naturel de l-algèbres graduées augmentées*
$$H^\bullet(A^!) \;\cong\; \mathrm{Ext}^\bullet_A(l,l)^{\mathrm{op}}$$
(où le produit sur $\mathrm{Ext}^\bullet_A(l,l)$ est le produit de Yoneda).

Démonstration. Démontrons tout d'abord qu'il existe une anti-équivalence de catégories
$$\Phi : \mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A)) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathsf{Ho}(\mathsf{DGMod}((A^!)^{\mathrm{op}})).$$
Cette équivalence est obtenue en composant les équivalences
$$\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A)) \cong \mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGComod}(B^{\mathsf{PC}}A)) \cong \mathsf{Ho}(\mathsf{DGMod}((\Omega\mathbb{D}A)^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}}.$$
La première équivalence est la dualité de Koszul (voir §3.2.2), et la seconde est induite par la dualité $\mathbb{D}$. On vérifie facilement que cette anti-équivalence vérifie $\Phi(\Sigma^n l) = \Sigma^{-n}A^!$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

En utilisant l'équivalence Φ, on obtient pour tout $n \in \mathbb{Z}$
$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_A(l,l) &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{PCDGMod}(A))}(l, \Sigma^n l)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathsf{DGMod}((A^!)^{\mathrm{op}}))}(\Sigma^{-n}A^!, A^!)\\
&\cong H^n(A^!),
\end{aligned}$$
ce qui prouve le résultat. □

3.3. **Unicité du modèle minimal.** Soit W un objet de $\mathsf{PCGr}(l^e)$, et soit d une différentielle sur l'algèbre graduée pseudo-compacte $\widehat{T}_l W$ compatible avec l'augmentation. Alors on obtient une structure de l-dg-cogèbre augmentée sur $\mathbb{D}(\widehat{T}_l W) \cong T_l(\mathbb{D}W)$. D'après le Lemme 2.3.1, cette structure induit une structure de l-algèbre A_∞ augmentée sur $l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W$. C'est cette structure qui est considérée dans l'énoncé suivant.

Théorème 3.3.1. *Soit A un objet de $\mathsf{PCAlgc}(l)$. Soient W un objet de $\mathsf{PCGr}(l^e)$ et d une différentielle sur l'algèbre graduée pseudo-compacte $\widehat{T}_l W$ telle que $d(W) \subset \widehat{T}_l^{\geq 2} W$, et supposons qu'il existe une équivalence faible*
$$(\widehat{T}_l W, d) \;\to\; A$$
dans $\mathsf{PCAlgc}(l)$. Alors il existe un quasi-isomorphisme
$$l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W \;\xrightarrow{\mathrm{qis}}\; A^!$$
dans $\mathsf{Alg}_\infty(l)$.

En particulier, il existe un isomorphisme
$$W \;\cong\; \Sigma^{-1}(\mathbb{D}\mathrm{Ext}^{>0}_A(l,l))$$
dans $\mathsf{PCGr}(l^e)$, et la multiplication m_2 sur $l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W$ est l'opposé du produit de Yoneda sur $\mathrm{Ext}^\bullet_A(l,l)$.

Démonstration. Par hypothèse il existe une équivalence faible $\widehat{T}_l W \to A$, et donc une équivalence faible $\mathbb{D}A \to T_l(\mathbb{D}W)$ dans $\mathsf{Cogc}(l)$. En appliquant Ω, on obtient donc (par définition des équivalences faibles dans $\mathsf{Cogc}(l)$, voir §1.3.3) un quasi-isomorphisme

$$A^! := \Omega\mathbb{D}A \;\xrightarrow{\mathrm{qis}}\; \Omega T_l(\mathbb{D}W) \tag{3.3.2}$$

dans $\mathsf{Alg}(l)$.

Comme expliqué avant l'énoncé, on a $T_l(\mathbb{D}W) = B(l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W)$, où $l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W$ est un objet de $\mathsf{Alg}_\infty(l)$. On a vu dans la preuve du Lemme 2.3.6 (voir (2.3.7)) qu'il existe un quasi-isomorphisme

$$l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W \;\to\; \Omega B(l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W) = \Omega T_l(\mathbb{D}W) \tag{3.3.3}$$

dans $\mathsf{Alg}_\infty(l)$. En comparant les équations (3.3.2) et (3.3.3), on obtient que les l-algèbres A_∞ augmentées $l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W$ et $A^!$ sont quasi-isomorphes.

Le deuxième énoncé du théorème découle du premier en utilisant la Proposition 3.2.2 et le fait que, pour la structure A_∞ sur $l \oplus \Sigma^{-1}\mathbb{D}W$, on a $m_1 = 0$ d'après l'hypothèse sur d. □

Annexe A. Théorie des modèles

Nos références principales pour cette partie sont [DS] et [To].

A.1. **Définitions.** Si $\mathscr{M}$ est une catégorie, on dira qu'un objet X de $\mathscr{M}$ est une rétraction d'un objet Y de $\mathscr{M}$ s'il existe des morphismes $i : X \to Y$ et $p : Y \to X$ tels que $p \circ i = \mathrm{Id}_X$. (Par exemple, si $\mathscr{M}$ est abélienne, une rétraction est un facteur direct.) Si f et g sont des morphismes dans $\mathscr{M}$, on dit que f est une rétraction de g si c'est une rétraction dans la catégorie des morphismes de $\mathscr{M}$[2].

Étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd} \tag{A.1.1}$$

dans $\mathscr{M}$, un *relèvement* est un morphisme $h : B \to X$ tel que $h \circ i = f$ et $p \circ h = g$.

Fixons maintenant une catégorie $\mathscr{C}$ dans laquelle les limites et colimites finies existent. Une structure de *catégorie de modèles* sur $\mathscr{C}$ est la donnée de trois classes de morphismes :

– les équivalences faibles (notées $\xrightarrow{\sim}$),
– les fibrations,
– les cofibrations

qui contiennent chacunes les identités, sont stables par composition, et vérifient les axiomes suivants. (Dans ces axiomes, on dira qu'une fibration est

2. Cette catégorie est la catégorie $\mathsf{Hom}(\mathscr{D}, \mathscr{M})$ où $\mathscr{D}$ est la catégorie avec 2 objets A et B et un unique morphisme $A \to B$ (en plus des identités de A et B). De façon plus concrète, les objets de cette catégorie sont les triplets (X, Y, f) où X et Y sont des objets de $\mathscr{M}$ et $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathscr{M}$. Les morphismes de (X, Y, f) dans (X', Y', f') sont les couples (g, h) où $g : X \to X'$ et $h : Y \to Y'$ sont des morphismes dans $\mathscr{M}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y'. \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

acyclique si elle est également une équivalence faible, et de même pour les cofibrations.)

(1) Si f, g sont des morphismes composables dans $\mathscr{C}$, et si parmi les morphismes f, g et $g \circ f$ deux sont des équivalences faibles, alors le troisième est également une équivalence faible.

(2) Une rétration d'une fibration, respectivement cofibration, respectivement équivalence faible, est une fibration, respectivement cofibration, respectivement équivalence faible.

(3) Étant donné un diagramme comme (A.1.1), un relèvement existe si l'une des deux conditions suivantes est réalisée : soit i est une cofibration et p est une fibration acyclique, soit i est une cofibration acyclique et p est une fibration.

(4) Tout morphisme f dans $\mathscr{C}$ peut se factoriser de deux manières : $f = p \circ i$ où i est une cofibration et p une fibration acyclique, et $f = p \circ i$ où i est une cofibration acyclique et p est une fibration.

Il peut exister plusieurs structures de catégorie de modèles sur une catégorie donnée, et en général il est difficile de démontrer qu'il s'agit bien d'une telle structure. On pourra consulter [DS] pour des exemples "classiques".

Notons que, étant donnée une structure de catégorie de modèles sur $\mathscr{C}$, la classe des cofibrations est uniquement déterminée par la donnée des fibrations et des équivalences faibles, et que dualement la classe des fibrations est uniquement déterminée par la donnée des cofibrations et des équivalences faibles (voir [DS, Proposition 3.13]). Pour définir une telle structure, on se contentera donc parfois de définir équivalences faibles et fibrations, ou équivalences faibles et cofibrations.

Comme les limites et colimites finies existent dans $\mathscr{C}$, cette catégorie possède en particulier un objet initial $\emptyset$ et un objet final $*$. Un objet X de $\mathscr{C}$ est dit *cofibrant* si l'unique morphisme $\emptyset \to X$ est une cofibration, et *fibrant* si l'unique morphisme $X \to *$ est une fibration.

A.2. **Catégorie homotopique.** Fixons une catégorie $\mathscr{C}$ munie d'une structure de catégorie de modèles.

Soit X un objet de $\mathscr{C}$. Un *objet cylindre* pour X est la donnée d'un objet $X \wedge I$ [3] de $\mathscr{C}$ et d'un diagramme

$$X \bigsqcup X \ \to \ X \wedge I \xrightarrow{\sim} X$$

dont la composition est le morphisme $\mathrm{Id}_X + \mathrm{Id}_X : X \sqcup X \to X$. Un tel objet n'est en général pas unique.

Deux morphismes $f, g : X \to Y$ dans $\mathscr{C}$ sont dits *homotopes à gauche* s'il existe un objet cyclindre $X \wedge I$ pour X tel que le morphisme $f + g : X \sqcup X \to Y$ est la composée d'un morphisme $X \wedge I \to Y$ avec le morphisme $X \sqcup X \to X \wedge I$. On note alors $f \overset{l}{\sim} g$. On notera $\pi^l(X, Y)$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ pour la relation engendrée par $\overset{l}{\sim}$. Remarquons que si X est cofibrant, alors $\overset{l}{\sim}$ est déjà une relation d'équivalence (voir [DS, Lemma 4.7]).

3. Dans le cadre topologique qui a inspiré la théorie des modèles, $X \wedge I$ est le produit de X avec un intervalle de $\mathbb{R}$, d'où le choix de la notation.

Dualement, un *objet chemin* pour X est la donnée d'un objet X^I [4] de $\mathscr{C}$ et d'un diagramme

$$X \xrightarrow{\sim} X^I \to X \times X$$

dont la composée est le morphisme $(\mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_X) : X \to X \times X$. Un tel objet n'est en général pas unique.

Deux morphismes $f, g : X \to Y$ sont dits *homotopes à droite* s'il existe un objet chemin Y^I pour Y tel que le morphisme $(f, g) : X \to Y \times Y$ est la composée d'un morphisme $X \to Y^I$ et du morphisme $Y^I \to Y \times Y$. On note alors $f \overset{r}{\sim} g$. On notera $\pi^r(X, Y)$ le quotient de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ par la relation engendrée par $\overset{r}{\sim}$. Remarquons que si Y est fibrant, alors $\overset{r}{\sim}$ est déjà une relation d'équivalence (voir [DS, Lemma 4.16]).

Si X est cofibrant et Y est fibrant, alors les relations d'équivalence $\overset{r}{\sim}$ et $\overset{l}{\sim}$ coincident (voir [DS, Lemma 4.21]). Dans ce cas, on les notera simplement $\sim$. On notera aussi $\pi(X, Y)$ pour $\pi^r(X, Y) = \pi^l(X, Y)$.

La *catégorie homotopique* de $\mathscr{C}$, notée $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$, est par définition la localisation $S^{-1}\mathscr{C}$, où S est la classe des équivalences faibles. On notera $L_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathsf{Ho}(\mathscr{C})$ le foncteur naturel. Le résultat suivant permet de décrire de façon utile la catégorie $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$ (voir [DS, Proposition 5.11]).

Proposition A.2.1. *Soit X un objet cofibrant, et Y un objet fibrant. Alors le morphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \ \to \ \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathscr{C})}(L_{\mathscr{C}}X, L_{\mathscr{C}}Y)$$

défini par $L_{\mathscr{C}}$ est surjectif, et induit un isomorphisme

$$\pi(X, Y) \ \cong \ \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathscr{C})}(L_{\mathscr{C}}X, L_{\mathscr{C}}Y).$$

Remarque A.2.2. La définition de la catégorie $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$ dans [DS] n'est pas la même que celle choisie dans ces notes (qui est plutôt celle de [To]). L'équivalence entre ces deux définitions découle de [DS, Theorem 6.2].

Références

[Bo] N. Bourbaki, *Algèbre, Chapitre 9, Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Hermann, 1959.

[DS] W. G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, in *Handbook of algebraic topology*, North-Holland, 1995, p. 73–126.

[GZ] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer, 1967.

[Le] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞-catégories*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2003 (disponible à l'adresse `http://www.math.jussieu.fr/~keller/`).

[Po] L. Positselski, *Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence*, Memoirs of the A.M.S., Vol. 212, N. 996, 2011.

[To] B. Toën, *Lectures on DG-categories*, in *Topics in algebraic and topological K-theory*, Lecture Notes in Math. **2008**, Springer, 2011, p. 243–302.

[VdB] M. Van den Bergh, *Calabi-Yau algebras and superpotentials*, prépublication sur arXiv (1008.0599).

4. Dans le cadre topologique qui a inspiré la théorie des modèles, X^I est un espace de morphismes d'un intervalle de $\mathbb{R}$ vers X, d'où la notation.

Clermont Université, Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques, BP 10448, F-63000 Clermont-Ferrand.

CNRS, UMR 6620, Laboratoire de Mathématiques, F-63177 Aubière.

E-mail address: simon.riche@math.univ-bpclermont.fr