ANALYSE – LEÇON 223 : SUITES RÉELLES ET COMPLEXES. CONVERGENCE, VALEURS D'ADHÉRENCE. EXEMPLES ET APPLICATIONS

SIMON RICHE

1. Commentaires du jury (rapport 2024)

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superfluus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano–Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon.

Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement.

D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

2. Commentaires

Dans cette leçon il faut bien sûr définir proprement la convergence, les valeurs d'adhérence, et énoncer les théorèmes classiques (théorème des gendarmes, suites adjacentes, convergence des suites monotones, des suites de Cauchy), qui découlent tous plus ou moins directement de la propriété de la borne supérieure. Il faut également introduire les outils nécessaires à l'étude asymptotique des suites (domination, équivalents). On peut parler de séries, qui sont des cas particuliers de suites. Mais il est important de laisser une place importante aux exemples, qui doivent être aussi variés que possible.

Il faut également bien savoir travailler avec les suites les plus classiques, notamment les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, ou les suites définies par des relations de récurrence linéaire. (Pour tout cela, voir par exemple [Go, Chap. 4, §1.3].)

3. Exercices

3.1. **Valeurs d'adhérence.**

Date: Année 2025–2026.

Exercice 1. (1) Montrer que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle bornée qui n'admet qu'une valeur d'adhérence, alors elle converge.

(2) Application : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle bornée telle que la suite $(u_n + \frac{u_{2n}}{2})_{n\geq 0}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Référence : [FGN, Exercice 2.12. *Question de convergence*] et commentaires précédant cet exercice.

Exercice 2. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\geq 0}$. (Indication : on pourra utiliser l'irrationalité de π, et la description des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.)

Référence : `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/CAPES/analyse/Suites/cos(n)-et-sin(n).pdf`. On peut montrer un résultat similaire sur la suite $(\sin(n))_{n\geq 0}$ mais cela nécessite un argument supplémentaire ; voir la même fiche ou [Go, Chap. 4, §1.4, Exercice 5].

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$z_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{i}{k}).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\geq 1}$. (Indication : on pourra étudier séparément le module et l'argument de z_n.)

Référence : [FGN, Exercice 2.11. *Valeurs d'adhérence d'une suite complexe*].

3.2. **Suites définies par récurrence.**

Exercice 4. On considère des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ définies par les données de x_0 et y_0 et les relations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{5}{2}x_n - y_n \\ y_{n+1} & = & \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n \end{array} \right. .$$

Exprimer x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n. (Indication : on pourra utiliser un peu d'algèbre linéaire !)

Référence : Exercice 26 dans `https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/suitesseries/suitenum_rec&type=fexo`

Exercice 5. Étudier la bonne définition et le comportement asymptotique (en fonction de u_0) de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}.$$

Référence : [Go, Chap. 4, §1.4, Exercice 1].

Les suites définies par des récurrences de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec f une fonction d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans lui-même, ou d'une partie de $\mathbb{C}$ dans elle-même), sont appelées *systèmes dynamiques discrets*. Pour des généralités sur ces suites, et de nombreux exemples, on pourra consulter notamment [FGN, Exercices 2.19 et suivants].

3.3. **Suites définies implicitement.**

Exercice 6. Pour $n \geq 2$ on considère le polynôme
$$P_n = X^n + X^{n-1} + 2X - 1.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un unique rél $x_n > 0$ tel que $P_n(x_n) = x_n$. (Indication : on pourra étudier la fonction $x \mapsto P_n(x) - x$.
(2) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante et tend vers 1.

Référence : [FGN, Exercice 2.45. *Suite définie implicitement (1)*].

3.4. **Comportement asymptotique.**

Exercice 7 (Adapté du sujet Docteurs 2023, Exercice 1)**.** (1) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \ln(n).$$
(Indication : on pourra comparer avec une intégrale.)
(2) Justifier que la suite de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, et montrer que
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$
(3) Justifier que la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.
(4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$
converge. (Indication : on pourra étudier $u_{n+1} - u_n$.)
(5) En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$
(6) Déterminer un équivalent simple de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$v_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
(Indication : on pourra étudier v_{2n} et v_{2n+1} en regroupant les termes consécutifs de ces sommes.)

Exercice 8 (Extrait du sujet AP13)**.** Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive, décroissante, telle que $u_0 = 1$. On suppose également que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

(1) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
(2) Pour $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ on pose $E_s = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid u_n \geq \frac{1}{s}\}$. Montrer que E_s est un intervalle de $\mathbb{Z}$ de la forme $\{0, \cdots, N_s\}$, et que son cardinal $K_s = N_s + 1$ croît vers $+\infty$ (quand $s \to +\infty$).
(3) Montrer que pour tout $s \geq 1$ on a
$$\frac{K_s - 1}{2s} \leq \frac{1}{K_s} \sum_{n \in E_s} nu_n.$$

(4) Montrer que $\frac{K_s}{s}$ tend vers 0 quand $s \to +\infty$.

Exercice 9. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers relatifs et $(q_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs. Supposons que la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 0}$ converge vers un nombre irrationnel. Montrer que la suite $(q_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, et que la suite p_n tend soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$.

Référence : [Go, Chap. 4, §1.4, Exercice 4].

Références

[FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques - Oraux X-ENS - Analyse 1*, 2ème édition, Cassini, 2007.

[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*, Ellipses, 1994.