ALGÈBRE - LEÇON 155 : EXPONENTIELLE DE MATRICES. APPLICATIONS

SIMON RICHE

1. Commentaires du jury (rapport 2024)

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

2. Plan

Cette leçon a un temps été numérotée 156 ; il reste probablement certains documents qui y font référence par ce numéro.

2.1. **Ce qui doit apparaître.** Définition (convergence de la série).

Règles de calcul : comportement par rapport à la conjugaison, somme de matrices qui commutent (application : inversibilité), cas des matrices diagonales.

Calcul de l'exponentielle via la décomposition de Dunford. Lien entre diagonalisabilité de A et de $\exp(A)$.

Questions d'injectivité et surjectivité. (Application : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.)

Logarithme matriciel.

Décomposition polaire, exponentielle et matrices symétriques.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Date: Année 2024–2025.

2.2. **Ce qui peut apparaître.** Calcul de la différentielle de l'application exp. Description des points critiques (cf. Exercice 8).

Algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (cf. Exercice 7).

Décomposition polaire et description des groupes orthogonaux et symplectiques (cf. Partie 5 ci-dessous).

L'exponentielle réalise un homéomorphisme entre matrices nilpotentes et unipotentes (cf. Exercice 2 ci-dessous).

3. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument savoir répondre rapidement

(1) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.

(2) Montrer que si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors A et B commutent si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t(A+B)) = \exp(tA) \cdot \exp(tB)$. (*Indication* : on pourra dériver.)

(3) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas le carré d'une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ [1]. En déduire que cette matrice n'appartient pas à l'image de $\exp : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que pour tout $p \geq 1$ l'application

$$\begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & M^p \end{cases}$$

est surjective. (*Indication* : on utilisera la surjectivité de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.) Ce résultat s'étend-il à $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$? (*Indication* : penser aux matrices nilpotentes.)

(5) Comparer les décompositions de Dunford de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et de $\exp(A)$ [2]. En déduire que A est diagonalisable ssi $\exp(A)$ est diagonalisable.

4. Exercices

4.1. Questions d'injectivité, de surjectivité.

Exercice 1. (1) Déterminer toutes les matrices M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifient l'égalité $\exp(M) = I_n$.

(2) Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe une infinité de matrices $A' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(A) = \exp(A')$.

(3) Montrer que si A, B sont des matrices diagonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et telles que $\exp(A) = \exp(B)$, alors $A = B$. (*Indication* : on pourra montrer que B est un polynôme en $\exp(B)$, et en déduire que A et B commutent.)

Référence : pour (1), voir [FGN2, Ex. 4.25, Antécédent de l'identité par l'exponentielle] ou [CG1, Chap. VI, Ex. B.15] ou [Go, Chap. 4, §4.4, Ex. 5]. Pour (3), voir [FGN2, Ex. 4.22, Exponentielle de matrices réelles diagonalisables]. (Une autre preuve de cette propriété peut également être donnée comme dans la preuve du Théorème 2 ci-dessous.)

1. Si besoin, voir [Go, Chap. 4, §3.4, Ex. 2].
2. Si nécessaire, voir [FGN2, Ex. 2.31] ou [CG1, Chap. VI, Ex. B.15].

Exercice 2. On note $\mathcal{N}_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes. On rappelle que si $N \in \mathcal{N}_n$, on a
$$\exp(N) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} N^i.$$
De même, on note $\mathcal{U}_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices unipotentes, c'est-à-dire des matrices U telles que $U - I_n$ est nilpotente. Si $U \in \mathcal{U}_n$, on pose
$$\log(U) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} (U - I_n)^i.$$
Le but de cet exercice est de montrer que ces deux fonctions définissent des homéomorphismes réciproques entre $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{U}_n$.

(1) Montrer que les fonctions exp et log considérées ci-dessus définissent des fonctions continues de $\mathcal{N}_n$ vers $\mathcal{U}_n$ et de $\mathcal{U}_n$ vers $\mathcal{N}_n$ respectivement.

(2) Dans cette question on fixe $U \in \mathcal{U}_n$. On veut montrer que $\exp(\log(U)) = U$.

(a) On pose
$$L(t) := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} t^i (U - I_n)^i.$$
Montrer que $L : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$L'(t) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} t^{i-1} (U - I_n)^i.$$

(b) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \exp(L(t))$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est la fonction
$$t \mapsto L'(t) \cdot \varphi(t).$$

(c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$(I_n + t(U - I_n)) \cdot \varphi'(t) = (U - I_n) \cdot \varphi(t).$$

(d) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$(U - I_n)\varphi'(t) + (I_n + t(U - I_n)) \cdot \varphi''(t) = (U - I_n) \cdot \varphi'(t),$$
puis que $\varphi''(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(e) En déduire que $\varphi'(t) = U - I_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(f) Montrer finalement que $\varphi(t) = I_n + t(U - I_n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et conclure.

(3) Dans cette question on veut montrer que pour tout $N \in \mathcal{N}_n$ on a l'égalité $\log(\exp(N)) = N$.

(a) Montrer que si $N \in \mathcal{N}_n$ est telle que $\exp(N) = I_n$, alors $N = 0$. (*Indication(s)* : on pourra soit utiliser le fait qu'une matrice est diagonalisable ssi son exponentielle est diagonalisable, soit étudier le polynôme minimal de N, soit montrer que si m est l'indice de nilpotence de N, supposé > 1, alors la matrice $A := \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{(k+1)!} N^k$ est inversible et vérifie $N \cdot A = 0$.)

(b) Conclure. (*Indication* : on pourra vérifier que si $N \in \mathcal{N}_n$ alors la matrice $\log(\exp(N)) - N$ est nilpotente et que $\exp(\log(\exp(N)) - N) = I_n$.)

(4) Conclure.

Référence : [CG1, Chap. VI, Ex. B.11–B.12].

Exercice 3. En utilisant l'exercice 2, montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\exp(P(A)) = A$$

(et donc, en particulier, que $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.)

(*Indication* : on pourra commencer par traiter le cas $A = \lambda \cdot I_n + N$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ et N nilpotente puis, pour le cas général, considérer la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces propres généralisés de A et utiliser le théorème des restes chinois.)

Référence : [CG1, Chap. VI, Ex. B.13]. Pour une approche un tout petit peu différente à la surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe, voir [FGN2, Ex. 4.24, Image de l'exponentielle] ou [Go, Chap. 4, §4.4, Ex. 5].

Exercice 4.

(1) Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

(*Indication* : on pourra calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou alors interpréter cette matrice en termes de la multiplication par i dans $\mathbb{C}$.)

(2) On rappelle que pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice A diagonale par blocs avec des blocs égaux à I_p, $-I_q$ ou $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ telles que $M = PAP^{-1}$. En utilisant ce résultat, montrer que l'application exp induit une application surjective

$$\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\} \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}).$$

(3) En déduire que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc, puis la description des composantes connexes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Référence : [FGN3, Ex. 1.36] ou `https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/exp_SOn.pdf` ou [Go, Chap. 5, §3.5, Ex. 5].

4.2. **Sous-groupes à un paramètre.**

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes continu, il existe $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(t) = \exp(tM)$. On considère donc un morphisme de groupes continu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(1) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que la matrice $\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t$ est inversible. (*Indication* : on pourra étudier la limite de $\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t$ quand $a \to 0$.)

(2) En considérant l'intégrale $\int_s^{s+a} \varphi(t)\mathrm{d}t$, montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$.

(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi'(t) = \varphi'(0) \cdot \varphi(t)$.

(4) Conclure.

(5) Déterminer les morphismes de groupes continus de $\mathbb{R}$ vers $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Référence : [CG2, Chap. IX, Prop. A.5.1] ou [FGN2, Ex. 4.26, Sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$].

Exercice 6. Cette exercice est une application de l'Exercice 5.

On note S^1 le sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ formé des nombres complexes de module 1, qu'on munit de la distance induite par le module de $\mathbb{C}$. Le but de cet exercice est de montrer que les morphismes de groupes continus

$$S^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

sont exactement les morphismes de la forme

$$e^{it} \mapsto Q \cdot \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos(tk_1) & -\sin(tk_1)\\ \sin(tk_1) & \cos(tk_1)\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\cos(tk_r) & -\sin(tk_r)\\ \sin(tk_r) & \cos(tk_r)\end{pmatrix}, I_{n-2r}\right) \cdot Q^{-1}$$

pour $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$.

(1) Montrer que les applications ci-dessus définissent effectivement des morphismes continus de S^1 vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(2) Réciproquement, on considère un morphisme continu $\varphi : S^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

  (a) Montrer que l'application $t \mapsto \varphi(e^{it})$ définit un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

  (b) En déduire qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(e^{it}) = \exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (*Indication* : on pourra utiliser l'Exercice 5, et dériver.)

  (c) Montrer que $\exp(2\pi A) = I_n$.

  (d) En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres appartiennent à $i\mathbb{Z}$ et sont deux à deux conjuguées. (*Indication* : on pourra utiliser l'Exercice 1(1).)

  (e) Montrer que A est conjuguée (dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) à

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & -k_1\\ k_1 & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & -k_r\\ k_r & 0\end{pmatrix}, I_{n-2r}\right)$$

  pour des entiers $k_1, \dots, k_r$. (*Indication* : on pourra utiliser—après avoir rappelé comment cela se démontre—le fait que deux matrices réelles conjuguées sur $\mathbb{C}$ sont en fait conjuguées sur $\mathbb{R}$.)

  (f) Conclure. (*Indication* : on pourra utiliser le calcul fait dans l'Exercice 4.)

Référence : [FGN2, Ex. 4.29, Morphismes continues de S^1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$].

4.3. **Autres exercices.**

Exercice 7 (Algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)**.** (1) On se fixe une norme sur $\mathbb{R}^n$, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M - I_n\| < 1$, la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}(M - I_n)^i$$

converge. Sa limite sera notée $\log(M)$.

(2) Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|M - I_n\| < 1$ on a l'égalité $\exp(\log(M)) = M$. (*Indication* : on pourra adapter la preuve de l'Exercice 2.)

(3) Montrer que pour toutes $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\left(\exp(\frac{1}{k}M)\exp(\frac{1}{k}N)\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(M+N).$$

(*Indication* : on pourra utiliser des développements limités à l'ordre 1 de exp et log aux voisinages de 0 et I_n respectivement.)

(4) Montrer que pour toutes $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on a

$$\big(\exp(\frac{1}{k}M)\exp(\frac{1}{k}N)\exp(-\frac{1}{k}M)\exp(-\frac{1}{k}N)\big)^{k^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(MN-NM).$$

(*Indication* : on pourra utiliser des développements limités à l'ordre 2 de exp et log aux voisinages de 0 et I_n respectivement.)

(5) Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathfrak{g} := \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tM) \in G\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par l'application $(M, N) \mapsto MN - NM$.

(6) Décrire explicitement l'algèbre de Lie des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. (Pour ce dernier cas, on pourra s'aider de l'Exercice 4.)

Référence : [GT, p. 81–83].

Exercice 8 (Points critiques de l'exponentielle)**.** On rappelle[3] que la différentielle de l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ au point X est l'application

$$d(\exp)_X : H \mapsto \exp(X) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \cdot (-\mathrm{ad}_X)^k\right)(H),$$

où

$$\mathrm{ad}_X : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

est l'application $H \mapsto X \cdot H - H \cdot X$.

(1) (a) Montrer que si X est nilpotente alors l'endomorphisme ad_X est nilpotent.
    (b) Montrer que si X est diagonalisable alors ad_X est diagonalisable, et déterminer ses valeurs propres.
    (c) En déduire la décomposition de Dunford de ad_X en fonction de celle de X.

(2) En utilisant que pour $z \neq 0$ on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z)^k}{(k+1)!} = \frac{1-\exp(-z)}{z},$$

montrer qu'une matrice $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est un point critique de exp (c'est-à-dire que $d(\exp)_X$ n'est pas un isomorphisme) si et seulement si elle admet deux valeurs propres distinctes dont la différence est dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Référence : [GT, p. 85–87].

Exercice 9. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. À quelle condition a-t-on $\exp(tM) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$?

5. Complément : Décomposition polaire et sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Référence : [Se, Chap. 7] ou [CG1, Chap. 6].

3. Voir [Ro, Ex. 99, p. 288] pour une preuve de cette formule. Il existe une formule plus élémentaire (mais moins utile) de cette formule, voir [Ro, Ex. 38, p. 107].

5.1. **Décomposition polaire.** On fixe $n \geq 1$. On rappelle que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices M qui vérifient

$$\|Mx\| = \|x\|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$. En utilisant le fait que

$$\langle x, y \rangle = {}^t x \cdot y$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ (où on identifie tout vecteur $x = (x_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice de taille $(n, 1)$ et de coefficients les x_i), on voit que

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M \cdot M = I_n\}.$$

On notera également $\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques définies positives (qui est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une distance, obtenue par restriction à partir d'un choix de norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Cette distance dépend du choix de norme, mais toutes les notions topologiques associées (sous-ensembles ouverts, fermés, continuité, etc.) n'en dépendent pas, par équivalence des normes. De même, tout sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (en particulier, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) devient ainsi un espace métrique.

Rappelons le théorème suivant.

Théorème 1. L'application

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

définie par $(M, N) \mapsto MN$ est un homéomorphisme.

En particulier, ce théorème affirme que toute matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme un produit $A = MN$ avec M dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et N dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'écriture $A = MN$ est appelée la *décomposition polaire* de A.

Pour une preuve de ce théorème, on pourra consulter par exemple [Se, Théorème 7.1.1] ou [CG1, Chap. VI, Théorème 1.1.3]. (Pour une preuve de l'existence et unicité de la décomposition, mais qui ne mentionne pas la continuité de l'inverse, voir [Go, Chap. 5, §2.5, Ex. 6].) Rappelons simplement qu'étant donnée une matrice A, on obtient l'unique décomposition $A = MN$ avec M dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et N dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en définissant N comme l'unique matrice de $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = {}^t A \cdot A$, puis en posant $M := AN^{-1}$. (Cette construction utilise en particulier le fait que, pour tout P dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice Q dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $P = Q^2$.)

5.2. **Matrices symétriques et exponentielle.** L'autre résultat important dont nous aurons besoin est le suivant.

Théorème 2. L'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ se restreint en un homéomorphisme

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

La preuve du théorème utilisera deux lemmes préliminaires. Pour le premier, étant donnée une matrice M, on notera $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres *complexes* de M.

Lemme 1. Pour toute matrice symétrique M on a
$$\|M\|_2 = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda|,$$
où $\|\cdot\|_2$ est la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne standard $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. La matrice M étant symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée ; en d'autres termes, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1},$$
où $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients sont les réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. (Ici on a $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors
$$\begin{aligned}\|Mx\| = \|P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1} \cdot x\| &= \|\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1} \cdot x\| \\ &\leq \left(\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda| \right) \cdot \|P^{-1}x\|.\end{aligned}$$
La matrice P^{-1} appartient aussi à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et donc $\|P^{-1}x\| = \|x\|$. On obtient ainsi que
$$\|M\|_2 \leq \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda|.$$

L'inégalité réciproque se vérifie facilement en considérant un vecteur propre pour la valeur propre de valeur absolue maximale, ce qui achève la preuve. □

Lemme 2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). Notons $\mu_1, \ldots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes de $\exp(M)$ (qui sont nécessairement dans $\mathbb{R}_{>0}$). Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $Q(\mu_i) = \ln(\mu_i)$ pour tout i, alors $M = Q(\exp(M))$.

Démonstration. Puisque M est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$M = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1}.$$
Alors on a
$$\exp(M) = P \cdot \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n)) \cdot P^{-1},$$
puis
$$Q(\exp(M)) = P \cdot \mathrm{diag}(Q(\exp(\lambda_1)), \ldots, Q(\exp(\lambda_n))) \cdot P^{-1}.$$
Notre choix de Q assure que $Q(\exp(\lambda_i)) = \lambda_i$ pour tout i, ce qui implique que $Q(\exp(M)) = M$, comme annoncé. □

Preuve du Théorème 2. Montrons tout d'abord que exp envoie toute matrice symétrique sur une matrice symétrique définie positive. Pour cela, considérons une matrice $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Comme dans la preuve du Lemme 1, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$M = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1}.$$
On obtient alors que
$$\exp(M) = P \cdot \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n)) \cdot P^{-1},$$
ce qui montre que $\exp(M)$ est symétrique et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives ; en d'autres termes elle appartient à $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a ainsi montré que l'application exp se restreint en une application
$$\exp_{\mathrm{S}} : \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Montrons maintenant que cette application est surjective. En effet, comme ci-dessus, si $M \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que

$$M = P \cdot \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \cdot P^{-1}.$$

Si on pose, pour tout i, $\lambda_i := \ln(\mu_i)$, alors on a

$$M = \exp\bigl(P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1}\bigr),$$

ce qui prouve la surjectivité de $\exp_{\mathrm{S}}$.

L'injectivité de $\exp_{\mathrm{S}}$ découle du Lemme 2. En effet si $M, M' \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $\exp(M) = \exp(M')$, puisque M et M' sont diagonalisables, si on choisit un polynôme Q tel que $Q(\nu) = \ln(\nu)$ pour toute valeur propre de $\exp(M) = \exp(M')$, alors on a

$$M = Q(\exp(M)) = Q(\exp(M')) = M'.$$

On a donc montré que l'application $\exp_{\mathrm{S}}$ est une bijection. Elle est continue par continuité de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour terminer la preuve, il ne reste donc qu'à démontrer la continuité de la bijection réciproque. Pour cela, on considère une suite $(A_p)_{p\geq 0}$ de matrices de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que la suite $(\exp(A_p))_{p\geq 0}$ converge vers une matrice B de $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par bijectivité de $\exp_{\mathrm{S}}$, il existe une (unique) matrice symétrique A telle que $B = \exp(A)$. On doit montrer que la suite $(A_p)_{p\geq 0}$ converge vers A ; pour cela, il suffit de montrer qu'elle est bornée et que A est sa seule valeur d'adhérence. Cette dernière propriété est évidente, puisque toute matrice A' de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ qui est valeur d'adhérence de $(A_p)_{p\geq 0}$ doit vérifier $\exp(A') = B$ par continuité de exp, ce qui implique que $A = A'$ par bijectivité de $\exp_{\mathrm{S}}$.

Pour terminer la preuve, on montre donc que la suite $(A_p)_{p\geq 0}$ est bornée. Pour cela on va utiliser le Lemme 1. Puisque la suite $(\exp(A_p))_{p\geq 0}$ est convergente elle est bornée ; le Lemme 1 montre alors qu'il existe $m > 0$ tel que chaque valeur propre μ de chaque $\exp(A_p)$ vérifie $|\mu| \leq m$. Si ν est une valeur propre d'une matrice A_p alors $\exp(\nu)$ est une valeur propre de $\exp(A_p)$, et donc $\exp(\nu) \leq m$; on en déduit que $\nu \leq \ln(m)$. De même, puisque $\exp(A_p)^{-1} = \exp(-A_p)$ pour tout p, la suite $(\exp(-A_p))_{p\geq 0}$ converge ; il existe donc $m' > 0$ tel que chaque valeur propre μ de chaque $\exp(-A_p)$ vérifie $|\mu| \leq m'$; alors si ν est une valeur propre d'une matrice A_p, puisque $\exp(-\nu)$ est une valeur propre de $\exp(-A_p)$ on a $\exp(-\nu) \leq m'$, de sorte que $\nu \geq -\ln(m')$. Finalement, on a vérifié que chaque valeur propre de chaque A_p appartient à $[-\ln(m'), \ln(m)]$; en appliquant le Lemme 1 encore une fois on obtient que la suite $(A_p)_{p\geq 0}$ est bornée, comme voulu. □

Comme corollaire des théorèmes 1 et 2, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1. Il existe un homéomorphisme

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

où $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ est vu comme espace métrique pour n'importe quel choix de norme.

Démonstration. D'après le théorème 1, l'espace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe au produit $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Puis le théorème 2 assure que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. □

L'espace métrique $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ est très simple. Ce corollaire dit donc que "toute la topologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est concentrée dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$". Par exemple, le nombre de composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est le même que le nombre de composantes connexes de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, à savoir 2. (Ces deux nombres peuvent bien sûr se calculer indépendamment [4] ; mais on peut également déduire l'un de l'autre en utilisant le Corollaire 1.)

5.3. **Compatibilité de la décomposition polaire avec certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.** La décomposition polaire stabilise certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, comme montré par le lemme suivant.

Lemme 3. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Supposons que :

- si M appartient à G, alors ${}^tM$ appartient à G ;
- si M appartient à $G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'unique matrice N de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$ appartient à G.

Alors pour toute matrice A de G, si la décomposition polaire de A est $A = MN$, les matrices M et N appartiennent à G. En particulier, la multiplication des matrices induit un homéomorphisme

$$(G \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) \times (G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} G.$$

Démonstration. Comme rappelé au §5.1, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et si la décomposition polaire de A est $A = MN$, alors N est l'unique matrice de $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = {}^tA \cdot A$. Si A appartient à G, alors par hypothèse ${}^tA$ également, et donc N^2 appartient à G puisque G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par hypothèse encore, ceci implique que $N \in G$. Puisque $M = AN^{-1}$, on a également $M \in G$, ce qui achève la preuve de la première affirmation.

Cette affirmation implique que la multiplication induit une bijection

$$(G \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) \times (G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} G.$$

Par continuité de la décomposition polaire et de son inverse (voir le Théorème 1), cette bijection et son inverse sont continues ; il s'agit donc d'un homéomorphisme. □

Nous allons voir ci-dessous quelques exemples de sous-groupes qui vérifient les hypothèses de ce lemme. Ces sous-groupes seront du type suivant. On considère une matrice J dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et le sous-ensemble

$$G = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot J \cdot A = J\}.$$

Proposition 1. Supposons que $J^2 = \pm I_n$. Alors G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et il vérifie les hypothèses du Lemme 3. De plus, $G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, où d est la dimension de l'espace vectoriel

$$\{A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot J + J \cdot A = 0\}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que G est stable par la transposition. On considère donc $A \in G$. On a

$${}^tA \cdot J \cdot A \cdot J \cdot {}^tA = J^2 \cdot {}^tA = \pm {}^tA = {}^tA \cdot J^2.$$

En multipliant à gauche par $({}^tA \cdot J)^{-1}$, on en déduit que $A \cdot J \cdot {}^tA = J$, et donc que ${}^tA \in G$.

4. Pour le cas de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, voir l'Exercice 4.

Il est clair que G est stable par multiplication dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour montrer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il suffit donc de montrer qu'il est stable par passage à l'inverse. Mais comme vu ci-dessus, si A appartient à G on a $A \cdot J \cdot {}^tA = J$, et donc en prenant les inverses on obtient que

$$ {}^tA^{-1} \cdot J^{-1} \cdot A^{-1} = J^{-1}. $$

Puisque $J^{-1} = \pm J$, ceci implique que A^{-1} appartient à G, comme voulu.

Montrons maintenant que G vérifie la deuxième condition du Lemme 3. On considère donc $M \in G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme dans la preuve du Lemme 1, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$ M = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^{-1}. $$

Si on pose

$$ N = P \cdot \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P^{-1}, $$

alors $N \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N^2 = M$; N est donc l'unique matrice de $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dont le carré est M. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i, alors on a

$$ Q(M) = P \cdot \mathrm{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) \cdot P^{-1} = P \cdot \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P^{-1} = N. $$

Si on suppose de plus que $Q(1/\lambda_i) = 1/\sqrt{\lambda_i}$ pour tout i, alors on a de même que $Q(M^{-1}) = N^{-1}$. Fixons un tel polynôme Q. (Un tel polynôme existe effectivement, et peut par exemple être construit comme un polynôme d'interpolation.) Puisque $M \in G$ on a

$$ {}^tM \cdot J = J \cdot M^{-1}; $$

on en déduit facilement par récurrence que pour tout $k \geq 0$ on a

$$ ({}^tM)^k \cdot J = J \cdot (M^{-1})^k, $$

puis par linéarité que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ on a

$$ R({}^tM) \cdot J = J \cdot R(M^{-1}). $$

En appliquant cette propriété au polynôme Q, puisque $Q({}^tM) = {}^tQ(M) = {}^tN$, on obtient que

$$ {}^tN \cdot J = J \cdot N^{-1}, $$

ce qui montre que $N \in G$.

Pour terminer la démonstration, il reste à montrer que $G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$ pour l'entier d de l'énoncé. Pour cela on pose [5]

$$ \mathfrak{g} := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exp(xA) \in G\}. $$

Remarquons tout d'abord qu'on a

$$ \mathfrak{g} = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot J + J \cdot A = 0\}. \tag{1} $$

En effet, si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tA \cdot J + J \cdot A = 0$, alors on a

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dx}\left({}^t\exp(xA) \cdot J \cdot \exp(xA)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\exp(x{}^tA) \cdot J \cdot \exp(xA)\right) \\ &= {}^tA \cdot \exp(x{}^tA) \cdot J \cdot \exp(xA) + \exp(x{}^tA) \cdot J \cdot A \cdot \exp(xA) \\ &= \exp(x{}^tA) \cdot ({}^tA \cdot J + J \cdot A) \cdot \exp(xA) = 0. \end{aligned} $$

5. Voir l'Exercice 7 pour une justification de l'apparition de cette formule.

On en déduit que la fonction (de classe $\mathscr{C}^\infty$) $x \mapsto {}^t\exp(xA) \cdot J \cdot \exp(xA)$ est constante sur $\mathbb{R}$, et égale à sa valeur en 0, c'est-à-dire J. Ce qui montre que $A \in \mathfrak{g}$. Réciproquement, si $A \in \mathfrak{g}$, en dérivant l'égalité ${}^t\exp(xA) \cdot J \cdot \exp(xA) = J$ (par rapport à x) en 0, on trouve que ${}^tA \cdot J + J \cdot A = 0$, ce qui achève la preuve de (1).

On va maintenant montrer que l'application exponentielle induit un homéomorphisme

$$\mathfrak{g} \cap \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Ceci achèvera la preuve puisque $\mathfrak{g} \cap \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (d'après l'égalité (1)) de dimension d, et est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^d$. Tout d'abord, puisque l'application exp envoie $\mathfrak{g}$ dans G (par définition) et $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (d'après le Théorème 2), elle induit bien une application de $\mathfrak{g} \cap \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ vers $G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus cette application est continue (car c'est la restriction de l'application continue $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) et injective (puisque exp est injective sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ d'après le Théorème 2). Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit donc $M \in G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le Théorème 2 il existe une unique matrice $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \exp(A)$; il reste à démontrer que $A \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire que ${}^tA \cdot J + J \cdot A = 0$ (d'après (1)). Pour cela, choisissons $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(\mu) = \ln(\mu)$ pour tout réel μ qui est une valeur propre de M ou de $M^{-1} = \exp(-A)$. (Ceci est possible puisque ces valeurs propres sont en nombre fini, et toutes strictement positives.) D'après le Lemme 2 on a alors

$$Q(M) = A, \quad Q(M^{-1}) = -A.$$

Puisque $M \in G$, on a ${}^tM \cdot J = J \cdot M^{-1}$; ceci implique que

$${}^tA \cdot J = {}^tQ(M) \cdot J = Q({}^tM) \cdot J = J \cdot Q(M^{-1}) = -J \cdot A,$$

ce qui achève la preuve de la surjectivité.

Finalement on remarque que l'application inverse de notre bijection est la restriction à $G \cap \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de l'inverse de l'homéomorphisme du Théorème 2 ; elle est donc continue, ce qui achève la preuve. $\square$

5.4. **Le cas des groupes orthogonaux.** Fixons $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $p + q = n$, et considérons la forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$r(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

(Cette forme quadratique est de signature (p, q).) Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(p, q)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles laissant cette forme quadratique invariante, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$r(Mx) = r(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Si on note

$$J := \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}),$$

alors on a

$$r(x) = {}^tx \cdot J \cdot x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où on identifie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ à la matrice de taille $(n, 1)$ et de coefficients $x_1, \ldots, x_n$. En utilisant cette formule il n'est pas difficile de voir que

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot J \cdot A = J\}.$$

Puisque $J^2 = I_n$, on est dans le cadre d'application de la Proposition 1 ; le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ est donc homéomorphe à

$$(\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}^d,$$

où

$$d = \dim(\{A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot J + J \cdot A = 0\}).$$

Dans ce cas particulier on peut décrire ces données plus explicitement, comme suit.

Proposition 2. L'application envoyant un couple de matrices (A,B) sur la matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux A et B, induit un homéomorphisme

$$\mathrm{O}_p(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_q(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})).$$

De plus, dans ce cas on a

$$d = pq.$$

Démonstration. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, qu'on écrit par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A est de taille (p,p) et D de taille (q,q). Cette matrice appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tM \cdot M = I_n$, ce qui se traduit par les égalités suivantes :

$${}^tA \cdot A + {}^tC \cdot C = I_p, \quad {}^tD \cdot D + {}^tB \cdot B = I_q, \quad {}^tA \cdot B + {}^tC \cdot D = 0.$$

De même, M appartient à $\mathrm{O}(p,q)$ si et seulement ${}^tM \cdot J \cdot M = J$, ce qui se traduit par les égalités :

$${}^tA \cdot A - {}^tC \cdot C = I_p, \quad {}^tD \cdot D - {}^tB \cdot B = I_q, \quad {}^tA \cdot B - {}^tC \cdot D = 0.$$

On obtient donc que M appartient à $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si

$${}^tA \cdot A = I_p,\ {}^tC \cdot C = 0,\ {}^tD \cdot D = I_q,\ {}^tB \cdot B = 0,\ {}^tA \cdot B = 0,\ {}^tC \cdot D = 0.$$

La première et la troisième égalités impliquent que A et D sont orthogonales, et donc inversibles ; les deux dernières égalités reviennent alors à dire que B et C sont nulles. On obtient ainsi que l'application de l'énoncé est bien définie et bijective ; le fait qu'elle est continue ainsi que son inverse est évident.

En utilisant la même écriture par blocs que ci-dessus, on obtient que $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et D sont symétriques et $B = {}^tC$. Dans ce cas, elle vérifie ${}^tM \cdot J + J \cdot M = 0$ si et seulement si $A = 0$ et $D = 0$. On a donc $d = \dim(\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})) = pq$. □

Une conséquence immédiate de la Proposition 2 est l'énoncé suivant.

Corollaire 2. Le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ est compact si et seulement si $p = 0$ ou $q = 0$, auquel cas il coïncide avec $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Intéressons-nous maintenant aux composantes connexes de $\mathrm{O}(p,q)$.

Corollaire 3. Le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ admet 4 composantes connexes si p et q sont non nuls, et 2 sinon. Dans le cas où p et q sont non nuls, en écrivant les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous forme de blocs

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A est de taille (p,p) et D de taille (q,q), ces composantes connexes sont les 4 sous-ensembles définis par les conditions

$$\varepsilon \det(A) > 0, \quad \varepsilon' \det(D) > 0,$$

pour les 4 choix possibles de $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{\pm 1\}^2$.

Démonstration. Le décompte du nombre de composantes connexes de $\mathrm{O}(p,q)$ est immédiat à partir de la Proposition 2, puisque $\mathrm{O}_m(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes si $m \geq 1$. Par ailleurs, comme vu dans la preuve de la Proposition 2, si

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

comme dans l'énoncé et si M appartient à $\mathrm{O}(p,q)$, alors

$${}^t\!A \cdot A = I_p + {}^t C \cdot C.$$

Ceci implique que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|Ax\|^2 = \|x\|^2 + \|Cx\|^2,$$

et donc que la matrice A est inversible. De même la matrice D est nécessairement inversible. L'application continue de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$M \mapsto (\det(A), \det(D)) \tag{2}$$

envoie donc $\mathrm{O}(p,q)$ dans $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$. Si on note $G_{\varepsilon,\varepsilon'}$ le sous-ensemble défini dans l'énoncé pour chaque $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{\pm 1\}^2$, on a alors

$$\mathrm{O}(p,q) = \bigsqcup_{(\varepsilon,\alpha) \in \{\pm 1\}^2} G_{\varepsilon,\alpha},$$

et chaque $G_{\varepsilon,\alpha}$ est non vide et ouvert et fermé dans $\mathrm{O}(p,q)$, comme image réciproque d'un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$. Comme $\mathrm{O}(p,q)$ admet 4 composantes connexes, ils coïncident donc avec ces composantes connexes. □

Supposons encore que p et q sont non nuls. Remarquons que la composante connexe de $\mathrm{O}(p,q)$ contenant le neutre (c'est-à-dire $G_{+1,+1}$) est nécessairement un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}(p,q)$. Le quotient par ce sous-groupe définit un morphisme de groupes surjectif

$$\mathrm{O}(p,q) \to \{\pm 1\}^2,$$

qui envoie chaque $G_{\varepsilon,\varepsilon'}$ sur $(\varepsilon, \varepsilon')$. (Ce morphisme est en fait induit par (2).) Ce morphisme admet un scindage, qui envoie $(\varepsilon, \varepsilon')$ sur la matrice

$$\mathrm{diag}(\varepsilon, 1, \dots, 1, \varepsilon') \; ;$$

on a donc un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{O}(p,q) \xrightarrow{\sim} G_{+1,+1} \rtimes \{\pm 1\}^2.$$

5.5. **Le cas du groupe symplectique.** Un autre exemple de sous-groupe du groupe linéaire auquel on peut appliquer la Proposition 1 est le groupe symplectique. Pour cela on suppose que n est pair et non nul, et on note $n = 2m$. Nous écrirons toutes les matrices M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sous forme de blocs, de la façon suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec A, B, C, D dans $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ du type considéré à la Proposition 1, avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice vérifie $J^2 = -I_n$, et donc cette proposition s'applique effectivement.

La description de l'intersection $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ va faire intervenir le sous-groupe unitaire $\mathrm{U}_m(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Rappelons que ce sous-groupe consiste en les matrices M telles que $M^* \cdot M = I_m$, où M^* est obtenue à partir de M en transposant et en appliquant la conjugaison complexe à tous les coefficients. Notons également que toute matrice M de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme $M = A + iB$ avec $A, B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Avec ces notations, on a

$$M^* = {}^tA - i \cdot {}^tB,$$

et donc

$$M^* \cdot M = I_m \Leftrightarrow \big({}^tA \cdot A + {}^tB \cdot B = I_m \text{ et } {}^tA \cdot B - {}^tB \cdot A = 0\big).$$

En d'autres termes, le groupe $\mathrm{U}_m(\mathbb{C})$ est isomorphe au groupe dont les éléments sont les paires $(A, B) \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})^2$ telles que ${}^tA \cdot A + {}^tB \cdot B = I_m$ et ${}^tA \cdot B - {}^tB \cdot A = 0$, muni de la multiplication donnée par

$$(A, B) \cdot (A', B') = (A \cdot A' - B \cdot B', A \cdot B' + B \cdot A').$$

Proposition 3. Il existe un homéomorphisme de groupes

$$\mathrm{U}_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

De plus, dans ce cas on a $d = m(m + 1)$.

Démonstration. Considérons une matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec les conventions ci-dessus. Supposons que cette matrice appartient à $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord elle vérifie ${}^tM \cdot J \cdot M = J$, ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$${}^tA \cdot C = {}^tC \cdot A, \quad {}^tA \cdot D - {}^tC \cdot B = I_m, \quad {}^tB \cdot D = {}^tD \cdot B.$$

D'après la Proposition 1 le groupe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par la transposition ; on a donc également $M \cdot J \cdot {}^tM = J$, ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$$A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA, \quad A \cdot {}^tD - B \cdot {}^tC = I_m, \quad C \cdot {}^tD = D \cdot {}^tC.$$

Enfin, M appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc elle vérifie ${}^tM \cdot M = I_n$, ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$${}^tA \cdot A + {}^tC \cdot C = I_m, \quad {}^tB \cdot B + {}^tD \cdot D = I_m, \quad {}^tB \cdot A + {}^tD \cdot C = 0.$$

On obtient donc que

$$B = B \cdot ({}^tA \cdot A + {}^tC \cdot C) = A \cdot {}^tB \cdot A + (A \cdot {}^tD - I_m) \cdot C$$
$$= A \cdot ({}^tB \cdot A + {}^tD \cdot C) - C = -C$$

et

$$D = D \cdot ({}^tA \cdot A + {}^tC \cdot C) = (I_m + C \cdot {}^tB) \cdot A + C \cdot {}^tD \cdot C$$
$$= A + C \cdot ({}^tB \cdot A + {}^tD \cdot C) = A.$$

On obtient ainsi que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},$$

et que de plus les matrices A et B vérifient ${}^tA \cdot A + {}^tB \cdot B = I_m$ et ${}^tA \cdot B - {}^tB \cdot A = 0$.

Réciproquement, on vérifie facilement que si A et B sont des matrices de $\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA \cdot A + {}^tB \cdot B = I_m$ et ${}^tA \cdot B - {}^tB \cdot A = 0$, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Puisque

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ -B' & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A' - B \cdot B' & A \cdot B' + B \cdot A' \\ -A \cdot B' - B \cdot A' & A \cdot A' - B \cdot B' \end{pmatrix},$$

au vu des rappels précédant l'énoncé on obtient donc bien un homéomorphisme de groupes

$$\mathrm{U}_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),$$

donné explicitement par

$$(A + iB) \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

Pour terminer la preuve, il reste à étudier $\{M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM \cdot J + J \cdot M = 0\}$. En écrivant

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

comme ci-dessus, M est symétrique si et seulement si A et D sont symétriques et $B = {}^tC$. Dans ce cas on a

$${}^tM \cdot J = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & {}^tB \end{pmatrix}$$

et

$$J \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tB & D \\ -A & -B \end{pmatrix};$$

l'équation ${}^tM \cdot J + J \cdot M = 0$ se traduit donc par

$${}^tB = B \quad \text{et} \quad D = -A.$$

Notre espace est donc isomorphe à $\mathrm{S}_m(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_m(\mathbb{R})$, et donc de dimension $m(m+1)$. □

Puisque $\mathrm{U}_m(\mathbb{C})$ est connexe (il est même connexe par arc ; cela peut par exemple se déduire de la diagonalisation des endomorphismes unitaires comme énoncée dans [Go, Chap. 5, §3.1]), on en déduit en particulier l'énoncé suivant.

Corollaire 4. Pour tout $n \geq 2$ pair, le group $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

5.6. **Prolongements.** Les exemples ci-dessus ne sont pas les seuls pour lesquels on peut utiliser la décomposition polaire pour étudier la topologie d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour le cas du groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ on pourra consulter [CG1, Chap. VI, Ex. B.3] et pour le cas des groupes $\mathrm{U}(p,q)$ on pourra consulter [CG1, Chap. VI, Ex. B.4].

6. Autres ressources sur cette leçon

`http://math.univ-lyon1.fr/~caldero/Agregexterne/Lecon-156-exp.pdf`

`https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/exo/image_exp_reelle.pdf`

Cours et exercices sur l'exponentielle de matrices disponibles sur :
`http://benoit.loisel.perso.math.cnrs.fr/teaching/2019-2020/agreg/index.html`

Références

[CG1] P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome I*, Calvage & Mounet, 2017.

[CG2] P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome II*, Calvage & Mounet, 2018.

[FGN2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 2*, deuxième édition, Cassini, 2009.

[FGN3] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 3*, Cassini, 2010.

[GT] S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre, 2ème édition*, Ellipses, 2009.

[Ro] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[Se] D. Serre, *Les matrices, théorie et pratique*, Dunod, 2001.