

# ALGÈBRE - LEÇON 153 : VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES. CALCULS EXACTS OU APPROCHÉS D'ÉLÉMENTS PROPRES. APPLICATIONS

SIMON RICHE

## 1. COMMENTAIRES DU JURY (RAPPORT 2025)

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type  $X_{n+1} = AX_n$  doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

**Remarque 1.** Cette leçon était la numéro 149 jusqu'à la session 2023.

## 2. PLAN

Le plan doit présenter :

- des aspects "théoriques" des valeurs propres et vecteurs propres (définitions, description en termes du polynôme caractéristique, caractérisation de la diagonalisabilité / trigonalisabilité via les polynômes caractéristique et minimal);
- des exemples de matrices dont on sait calculer les valeurs / vecteurs propres (matrices d'ordre fini, matrices circulantes, théorème de Perron–Frobenius);
- des méthodes algorithmiques de calcul approché de valeurs / vecteurs propres (par exemple la méthode de la puissance ou la méthode QR; les disques de Gerschgorin).

Il faudra trouver un équilibre entre ces 3 aspects mais, dans la mesure où vous traitez sérieusement chacun d'eux, vous pouvez privilégier l'un ou l'autre selon vos goûts.

Parmi les références utiles pour cette leçon on peut citer [Se] et [Ro]. Notons que le jury est en droit de vous demander de calculer explicitement des valeurs propres ou espaces propres pour des exemples de matrices.

### 3. EXERCICES

**Exercice 1.** Donner des exemples de matrices non trigonalisables, et de matrices trigonalisables mais non diagonalisables. (On pourra discuter selon le corps de base choisi.)

On se place sur un corps  $\mathbb{k}$ , et on note  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si  $f \in \text{End}(V)$ , on notera  $\mu_f$  son polynôme minimal, et  $\chi_f$  son polynôme caractéristique.

**Exercice 2** (Critères de diagonalisabilité). (1) Soit  $f \in \text{End}(V)$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $f$  est diagonalisable ;
- (b)  $f$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
- (c)  $\mu_f$  est scindé à racines simples.

(2) Peut-on caractériser la diagonalisabilité en termes de  $\chi_f$  ?

**Exercice 3** (Critères de trigonalisabilité). Soit  $f \in \text{End}(V)$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est trigonalisable ;
- (2)  $\chi_f$  est scindé ;
- (3)  $\mu_f$  est scindé ;
- (4)  $f$  admet un polynôme annulateur scindé.

**Exercice 4** (Codiagonalisation, cotrigonalisation). (1) Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes diagonalisables de  $V$  qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de  $V$  qui codiagonalise tous les  $f_i$ , c'est-à-dire dans laquelle les matrices de tous les  $f_i$  sont diagonales.

(2) Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes trigonalisables de  $V$  qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de  $V$  qui cotrigonalise tous les  $f_i$ , c'est-à-dire dans laquelle les matrices de tous les  $f_i$  sont triangulaires supérieures.

Si une famille d'endomorphismes est codiagonalisable, alors ces endomorphismes commutent deux à deux (puisque les matrices diagonales commutent entre elles). Le résultat de l'exercice précédent est donc optimal en ce qui concerne la codiagonalisation. Par contre, des endomorphismes cotrigonalisables ne commutent pas nécessairement entre eux ; pour la cotrigonalisation, on peut donc espérer obtenir des résultats sous des hypothèses plus faibles. Le but de l'exercice suivant est de démontrer un exemple d'un tel résultat, dans lequel l'hypothèse de commutation est remplacée par une hypothèse moins contraignante (mais on impose par contre d'avoir une certaine structure sur l'ensemble d'endomorphismes considéré).

On rappelle que si  $H$  est un groupe, son sous-groupe dérivé  $\mathcal{D}(H)$  est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme  $ghg^{-1}h^{-1}$  avec  $g, h \in H$ . On rappelle que  $\mathcal{D}(H)$  est un sous-groupe distingué de  $H$ , et que le groupe quotient  $H/\mathcal{D}(H)$  est abélien.

On définit le sous-groupe  $\mathcal{D}^n(H) \subset H$  par récurrence, en posant

$$\mathcal{D}^0(H) = H, \quad \mathcal{D}^{n+1}(H) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n(H)) \text{ pour } n \geq 0.$$

On vérifie facilement que chaque  $\mathcal{D}^n(H)$  est un sous-groupe distingué de  $H$ . On rappelle que  $H$  est dit *résoluble* si  $\mathcal{D}^n(H) = \{1\}$  pour  $n$  entier assez grand.

**Exercice 5** (Théorème de Lie–Kolchin). Dans cet exercice on suppose que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ . Le but est de démontrer le *Théorème de Lie–Kolchin*, qui affirme que si  $G \subset \text{GL}(V)$  est un sous-groupe résoluble connexe (pour la distance induite par n'importe quel choix de norme sur  $\text{End}(V)$ ) alors il existe une base de  $V$  dans laquelle les matrices de tous les éléments de  $G$  sont triangulaires supérieures.

- (1) Soit  $G \subset \text{GL}(V)$  un sous-groupe connexe. Montrer que chaque  $\mathcal{D}^n(G)$  est un sous-groupe connexe de  $G$ .
- (2) Le but de cette question est de montrer que si  $G \subset \text{GL}(V)$  un sous-groupe connexe résoluble non abélien, il existe un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  non trivial (c'est-à-dire strict et non nul) qui est stable par tous les éléments de  $G$ .
  - (a) On note  $\ell \geq 1$  le plus entier tel que  $\mathcal{D}^\ell(G) = \{1\}$ . (On a  $\ell \geq 2$  puisque  $G$  est non abélien.) Montrer que  $H := \mathcal{D}^{\ell-1}(G)$  est un sous-groupe distingué connexe abélien et non trivial de  $G$ .
  - (b) Montrer que l'ensemble

$$E := \{v \in V \setminus \{0\} \mid \forall h \in H, h(v) \in \mathbb{C}v\}$$

est non vide.

- (c) Si  $v \in E$ , pour tout  $h \in H$ , on note  $\alpha_v(h)$  le nombre complexe tel que  $h(v) = \alpha_v(h) \cdot v$ . Montrer que si  $v \in E$  et si  $g \in G$ , alors  $g(v) \in E$  et

$$\alpha_{g(v)}(h) = \alpha_v(g^{-1}hg)$$

pour tout  $h \in H$ .

- (d) Montrer que si  $v \in E$  la fonction  $\alpha_v : H \rightarrow \mathbb{C}$  est continue.
  - (e) On fixe  $v \in E$  et  $h \in H$ . Notons  $\lambda := \alpha_v(h)$  la valeur propre pour laquelle  $v$  est vecteur propre de  $h$ . Montrer que pour tout  $g \in G$  le vecteur  $g(v)$  est vecteur propre de  $h$  pour la valeur propre  $\lambda$ . (On pourra utiliser les deux questions précédentes, et remarquer que l'ensemble des valeurs propres de  $h$  est fini.)
  - (f) On fixe  $v \in E$ , et on note  $W$  le sous-espace de  $V$  engendré les vecteurs  $g(v)$  avec  $g \in G$  et  $v \in E$ . Montrer que  $W$  est un sous-espace non trivial de  $V$  stable par tous les éléments de  $G$ . (Indication : pour montrer que  $W \neq V$ , on raisonnera par l'absurde, et on montrera que si  $W = V$  tout élément de  $H$  est une homothétie de déterminant 1.)
- (3) Démontrer le théorème de Lie–Kolchin par récurrence sur  $\dim(V)$ .
  - (4) Montrer que si  $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est un sous-groupe résoluble connexe, alors  $G$  est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures.

(5) La réciproque de l’assertion de la question précédente est-elle vraie ?

Référence : [CG, Exercice IV.B.6].

**Exercice 6.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice telle que  $\rho(A) < 1$ , et soit  $b \in \mathbb{C}^n$ . On considère une suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par récurrence par  $v_{n+1} = Av_n + b$ . Montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite qu’on déterminera. (*Indication* : on pourra s’inspirer de la méthode utilisée par étudier les suites arithmético-géométriques réelles.)

**Exercice 7.** À quelle condition une matrice complexe antidiagonale (c’est-à-dire dont le coefficient d’indice  $(i, j)$  est nul si  $i + j \neq n + 1$ ) est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ? (*Indication* : on pourra commencer par considérer le cas  $n = 2$  puis, pour le cas général, utiliser des sous-espaces propres appropriés.)

**Exercice 8** (Matrices stochastiques). Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

- (1) Montrer que si  $A$  est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre de  $A$ , et déterminer un vecteur propre associé.
- (2) Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
- (3) Montrer que si  $A$  est une matrice stochastique, toute valeur propre complexe  $\lambda$  de  $A$  vérifie  $|\lambda| \leq 1$ .
- (4) Soit  $A$  une matrice stochastique, et  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$  de module 1, avec  $\lambda \neq 1$ . On fixe un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $Ax = \lambda x$ .
  - (a) Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  un indice tel que  $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ . Montrer que  $a_{i,i} = 0$ . (En particulier, ceci montre que si  $a_{i,i} \neq 0$  pour tout  $i$ , alors la seule valeur propre de  $A$  de module 1 est 1.)
  - (b) Montrer que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $a_{i,j} \neq 0$  on a  $x_j = \lambda x_i$ .
  - (c) En déduire que  $\lambda$  est une racine de l’unité d’ordre  $\leq n$ .
- (5) Montrer que si  $a_{i,j} \neq 0$  pour tous  $i, j$ , alors l’espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 1 est une droite. (*Indication* : on pourra ici aussi considérer un vecteur propre  $x$  associé à la valeur propre 1, et un indice  $i$  tel que  $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ .)

Référence : [FGN, Ex. 3.18–19–21, Matrices stochastiques].

**Exercice 9** (Topologie et diagonalisabilité). (1) Montrer que l’ensemble des matrices diagonalisables est dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

- (2) Montrer que l’ensemble des matrices diagonalisables sur  $\mathbb{R}$  n’est *pas* dense dans  $M_2(\mathbb{R})$ . (*Indication* : on pourra considérer une matrice dont le polynôme caractéristique est de discriminant strictement négatif.)
- (3) Montrer que si  $M \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $M$  est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée.

#### 4. COMPLÉMENT 1 : LA MÉTHODE $QR$

Les énoncés qui suivent sont tirés de [Se, §10.2].

**4.1. La factorisation  $QR$ .** On note  $U_n(\mathbb{C})$  le sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  formé des matrices unitaires. L'énoncé suivant est classique ; voir par exemple [Se, Prop. 8.3.1].

**Proposition 1.** Pour tout  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ , il existe un unique couple  $(Q, R)$  avec  $Q \in U_n(\mathbb{C})$  et  $R \in GL_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux réels positifs tel que  $M = QR$ .

Notons que pour  $R$  comme dans cet énoncé, comme  $R$  est inversible ses coefficients diagonaux sont automatiquement *strictement* positifs. La décomposition de  $M$  comme produit  $QR$  comme dans cette proposition est appelée *décomposition  $QR$*  de  $M$ . Cette décomposition satisfait la propriété suivante de continuité.

**Proposition 2.** Soit  $(M_k : k \geq 0)$  une suite de matrices de  $GL_n(\mathbb{C})$ , qui converge vers une matrice  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ . Considérons les décompositions  $QR$  des matrices  $M_k$  et  $M$  :

$$M_k = Q_k R_k, \quad M = QR.$$

Alors la suite  $(Q_k : k \geq 0)$  converge vers  $Q$ , et la suite  $(R_k : k \geq 0)$  converge vers  $R$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord la convergence de la suite  $(Q_k : k \geq 0)$  vers  $Q$ . Puisque  $U_n(\mathbb{C})$  est compact, pour cela il suffit de montrer que  $Q$  est sa seule valeur d'adhérence. Mais si  $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  est une fonction strictement croissante et si la suite  $(Q_{\varphi(k)} : k \geq 0)$  converge vers une matrice  $Q' \in U_n(\mathbb{C})$ , puisque  $R_{\varphi(k)} = (Q_{\varphi(k)})^{-1} M_{\varphi(k)}$  pour tout  $k$ , la suite  $(R_{\varphi(k)} : k \geq 0)$  converge vers  $R' := (Q')^{-1} M$ . De plus, puisque chaque  $R_{\varphi(k)}$  est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux réels positifs il en est de même de  $R'$ . Donc  $M = Q'R'$  est la décomposition  $QR$  de  $M$ , ce qui implique que  $Q' = Q$  par unicité dans la Proposition 1 et termine la preuve.

Une fois qu'on sait que  $(Q_k : k \geq 0)$  converge vers  $Q$ , en utilisant la formule  $R_k = (Q_k)^{-1} M_k$  on obtient que  $(R_k : k \geq 0)$  converge vers  $R$ .  $\square$

**Remarque 2.** En d'autres termes, en notant  $X \subset GL_n(\mathbb{C})$  le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux réels positifs, on a démontré que la multiplication des matrices induit un homéomorphisme

$$U_n(\mathbb{C}) \times X \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C}).$$

**4.2. La méthode  $QR$ .** Fixons  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ . On définit une suite  $(A_k : k \geq 1)$  de la façon suivante. On pose  $A_1 = A$  puis, si  $A_k$  est définie, on pose

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

où  $A_k = Q_k R_k$  est la décomposition  $QR$  de  $A_k$ .

**Théorème 1.** Supposons qu'on peut écrire

$$A = Y^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Y$$

où  $Y$  admet une décomposition  $LU$ <sup>1</sup> et

$$(1) \quad |\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|.$$

Alors la partie strictement triangulaire inférieure de  $A_k$  converge vers 0, et sa partie diagonale converge vers la matrice  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

---

1. On rappelle qu'une matrice  $M$  admet une décomposition  $LU$  si elle s'écrit comme produit  $M = LU$  avec  $L$  triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et  $U$  triangulaire supérieure. Une telle écriture est unique si elle existe, et est appelée *décomposition  $LU$*  de  $M$ .

Pour démontrer le théorème on utilisera deux lemmes préliminaires.

**Lemme 1.** Pour tout  $k \geq 1$  on pose

$$P_k = Q_1 \cdots Q_k, \quad S_k = R_k \cdots R_1.$$

Alors pour tout  $k \geq 1$  on a  $A^k = P_k S_k$ , et ceci est la décomposition  $QR$  de  $A^k$ .

*Démonstration.* Pour tout  $k \geq 1$  on a

$$P_{k+1} S_{k+1} = P_k A_{k+1} S_k.$$

Or on a

$$A_{k+1} = R_k Q_k = (Q_k)^{-1} A_k Q_k = \cdots = (Q_k)^{-1} \cdots (Q_1)^{-1} A Q_1 \cdots Q_k = (P_k)^{-1} A P_k.$$

Donc  $P_k A_{k+1} = A P_k$ , puis

$$P_{k+1} S_{k+1} = A P_k S_k.$$

On conclut ensuite par une récurrence immédiate.  $\square$

**Lemme 2.** La suite  $(R_k : k \geq 1)$  est bornée.

*Démonstration.* Pour tout  $k \geq 1$  on a

$$R_k = (Q_k)^{-1} A_k.$$

Si on note  $\|\cdot\|_2$  la norme subordonnée à la norme hermitienne standard sur  $\mathbb{C}^n$ , on a donc  $\|R_k\|_2 = \|A_k\|_2$ . D'autre part, pour tout  $k \geq 1$  on a

$$A_{k+1} = (Q_k)^{-1} A_k Q_k,$$

et donc pour la même raison on a  $\|A_{k+1}\|_2 = \|A_k\|_2$ . Donc la suite  $(A_k : k \geq 1)$  est bornée, ce qui implique l'énoncé.  $\square$

*Preuve du Théorème 1.* Écrivons  $Y = LU$  pour la décomposition  $LU$  de  $Y$ , et  $Y^{-1} = QR$  pour la décomposition  $QR$  de  $Y^{-1}$ . Notons également  $D$  la matrice  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Pour tout  $k \geq 1$  on a

$$A^k = Y^{-1} D^k Y = Q R D^k L U.$$

En utilisant l'hypothèse (1), on voit que la suite  $(D^k L D^{-k} : k \geq 1)$  converge vers  $I_n$ ; en d'autres termes, si on note  $D^k L D^{-k} = I_n + E_k$  alors la suite  $(E_k : k \geq 1)$  tend vers 0.

En utilisant le Lemme 1 on voit que pour tout  $k \geq 1$  on a

$$P_k S_k = Q R (I_n + E_k) D^k U = Q (I_n + R E_k R^{-1}) R D^k U.$$

La suite  $(I_n + R E_k R^{-1} : k \geq 1)$  tend vers  $I_n$ ; donc, si on note

$$I_n + R E_k R^{-1} = O_k T_k$$

la décomposition  $QR$  de  $I_n + R E_k R^{-1}$ , la Proposition 2 implique que les suites  $(O_k : k \geq 1)$  et  $(T_k : k \geq 1)$  tendent vers  $I_n$ , et on a

$$P_k S_k = (Q O_k) (T_k R D^k U).$$

Notons maintenant

$$|D| = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|), \quad D_1 = |D|^{-1} D.$$

Considérons également les coefficients diagonaux  $(u_{i,i} : i \in \{1, \dots, n\})$  de  $U$  et posons

$$D_2 = \text{diag} \left( \frac{u_{1,1}}{|u_{1,1}|}, \dots, \frac{u_{n,n}}{|u_{n,n}|} \right), \quad U' = (D_2)^{-1}U.$$

On a alors

$$P_k S_k = (Q O_k (D_1)^k D_2) ((D_2)^{-1} (D_1)^{-k} T_k R (D_1)^k D_2 |D|^k U')$$

où, dans le produit, la première matrice est unitaire et la deuxième est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux réels positifs. Par unicité de la décomposition  $QR$  (voir la Proposition 1), on a donc pour tout  $k \geq 1$

$$P_k = Q O_k (D_1)^k D_2, \quad S_k = (D_2)^{-1} (D_1)^{-k} T_k R (D_1)^k D_2 |D|^k U'.$$

Il s'ensuit que

$$Q_k = (P_{k-1})^{-1} P_k = (D_2)^{-1} (D_1)^{1-k} (O_{k-1})^{-1} O_k (D_1)^k D_2$$

et

$$R_k = S_k (S_{k-1})^{-1} = (D_2)^{-1} (D_1)^{-k} T_k R |D| D_1 R^{-1} (T_{k-1})^{-1} (D_1)^{k-1} D_2.$$

On a alors

$$Q_k - D_1 = (D_2)^{-1} (D_1)^{1-k} ((O_{k-1})^{-1} O_k - I_n) (D_1)^k D_2.$$

Ici les suites  $((D_2)^{-1} (D_1)^{1-k} : k \geq 1)$  et  $((D_1)^k D_2 : k \geq 1)$  sont bornées (car formées de matrices unitaires), et la suite  $((O_{k-1})^{-1} O_k - I_n : k \geq 1)$  tend vers 0. On en déduit que

$$Q_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} D_1.$$

De la même façon, si on pose

$$R'_k = (D_2)^{-1} (D_1)^{-k} R |D| D_1 R^{-1} (D_1)^{k-1} D_2$$

alors on a  $R_k - R'_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ . Finalement, on remarque que

$$A_k = Q_k R_k = (Q_k - D_1) R_k + D_1 R_k = (Q_k - D_1) R_k + D_1 R'_k + D_1 (R_k - R'_k).$$

Dans cette écriture le troisième terme tend vers 0, et le premier également grâce au Lemme 2. Puisque  $D_1 R'_k$  est triangulaire supérieure et que sa partie diagonale est la même que celle de  $D_1 |D| = D$ , ceci conclut la preuve.  $\square$

## 5. COMPLÉMENT 2 : LES DISQUES DE GERSHGÖRIN

Les énoncés qui suivent peuvent être retrouvés dans [Ro] ou [FGN, Ex. 3.17, Lemme d'Hadamard, disques de Gershgorin].

5.1. **Énoncé.** Pour  $x \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  on note  $\bar{D}(x, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| \leq r\}$ .

**Proposition 3.** Soit  $A = (a_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n) \in M_n(\mathbb{C})$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note

$$L_i = \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

Alors on a

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{D}(a_{i,i}, L_i).$$

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant, parfois appelé *lemme d'Hadamard*.

**Lemme 3.** Soit  $A = (a_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n) \in M_n(\mathbb{C})$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note

$$L_i = \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

Si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a  $|a_{i,i}| > L_i$ , alors  $A$  est inversible.

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que  $A$  n'est pas inversible, c'est-à-dire qu'il existe  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $Av = 0$ . Choisissons  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |v_j|$ , et notons que  $v_i \neq 0$  puisque  $v \neq 0$ . En considérant la  $i$ -ème coordonnée du vecteur  $Av = 0$ , on obtient que

$$a_{i,i}v_i = - \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} a_{i,j}v_j,$$

et donc

$$|a_{i,i}| \cdot |v_i| \leq \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \cdot |v_j|.$$

Ici le terme de droite est inférieur ou égal à  $L_i \cdot |v_i|$ , ce qui contredit notre hypothèse.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 3.* Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Puisque  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible, d'après le Lemme 3 il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq L_i.$$

Alors  $\lambda \in \overline{D}(a_{i,i}, L_i)$ .  $\square$

**Remarque 3.** (1) Les matrices qui vérifient l'hypothèse du Lemme 3 sont appelées à *diagonale strictement dominante*. Ce lemme affirme donc que les matrices à diagonale strictement dominante sont inversibles.

- (2) Les disques apparaissant dans la Proposition 3 sont appelés *disques de Gershgorin*.
- (3) Si on pose

$$L = \max_i (L_i + |a_{i,i}|) = \max_i \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right),$$

cette proposition montre que toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$  vérifie  $|\lambda| \leq L$ .

- (4) Si on pose

$$C_j = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq j}} |a_{i,j}|,$$

en appliquant la proposition à la transposée de  $A$ , dont le spectre est le même que celui de  $A$ , on obtient qu'on a également

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_j \overline{D}(a_{j,j}, C_j).$$

**5.2. Applications.** On peut déduire de la Proposition 3 un résultat de localisation des racines d'un polynôme unitaire quelconque.

**Corollaire 1.** Soit  $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$  un polynôme unitaire à coefficients complexes. Notons  $R = \max(|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|)$ . Alors les racines de  $P$  sont contenues dans

$$\overline{D}(0, R) \cup \overline{D}(|a_{n-1}|, 1).$$

*Démonstration.* Les racines de  $P$  sont les valeurs propres de la matrice compagnon associée. L'énoncé s'obtient donc en appliquant la Proposition 3 à cette matrice.  $\square$

On termine par un énoncé concernant le déterminant d'une matrice diagonale strictement dominante.

**Corollaire 2.** Soit  $A = (a_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n) \in M_n(\mathbb{C})$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note

$$L_i = \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

- (1) Si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a  $|a_{i,i}| > L_i$ , alors  $|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - L_i)$ .
- (2) Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a  $a_{i,i} > L_i$ , alors  $\det(A) \geq \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - L_i)$ .

*Démonstration.* (1) Notons  $A'$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en multipliant la  $i$ -ème ligne par  $\frac{1}{|a_{i,i}| - L_i}$ . Par multilinéarité du déterminant on a

$$\det(A) = \det(A') \cdot \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - L_i),$$

donc pour démontrer l'énoncé il suffit de montrer que  $\det(A') \geq 1$ . Puisque le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités), pour cela il suffit de montrer que chacune des valeurs propres de  $A'$  est de module supérieur ou égal à 1.

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A'$ , alors d'après la Proposition 3 il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$|\lambda - a'_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |a'_{i,j}|.$$

En utilisant le fait que  $|\lambda - a'_{i,i}| \geq |a'_{i,i}| - |\lambda|$ , on en déduit que

$$|\lambda| \geq |a'_{i,i}| - \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |a'_{i,j}| = \frac{1}{|a_{i,i}| - L_i} \cdot (|a_{i,i}| - L_i) = 1,$$

ce qui termine la preuve.

(2) La matrice  $A$  vérifie la condition de la question (1), donc on a  $|\det(A)| \geq \prod_{i=1}^n (|a_{i,i}| - L_i)$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que  $\det(A) \geq 0$ . Pour cela, on remarque que l'ensemble des matrices  $B \in M_n(\mathbb{R})$  qui vérifient  $b_{i,i} > \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} |b_{i,j}|$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  est convexe, et donc connexe. Son image par l'application continue  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  étant contenue dans  $\mathbb{R}^\times$  d'après le Lemme 3, il est contenu soit dans  $\mathbb{R}_{>0}$ , soit dans  $\mathbb{R}_{<0}$ . Cet ensemble contenant la matrice  $I_n$ , qui est de déterminant 1, elle est contenue dans  $\mathbb{R}_{>0}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [CG] P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome I*, Calvage & Mounet, 2017.
- [FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, mathématiques 2*, Cassini, 2021.
- [Ro] J.-É. Rombaldi, *Analyse matricielle - Cours et exercices résolus*, EDP Sciences, 1999.
- [Se] D. Serre, *Les matrices, théorie et pratique*, Dunod, 2001.