ALGÈBRE - LEÇON 153 : VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES. CALCULS EXACTS OU APPROCHÉS D'ÉLÉMENTS PROPRES. APPLICATIONS

SIMON RICHE

1. Commentaires du jury (rapport 2023)

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques. . .) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

Remarque 1. Cette leçon était la numéro 149 jusqu'à la session 2023.

2. Plan

Le plan doit présenter :

— des aspects "théoriques" des valeurs propres et vecteurs propres (définitions, description en termes du polynôme caractéristique, caractérisation de la diagonalisabilité / trigonalisabilité via les polynômes caractéristique et minimal) ;

— des exemples de matrices dont on sait calculer les valeurs / vecteurs propres (matrices d'ordre fini, matrices circulantes, théorème de Perron–Frobenius) ;

— des méthodes algorithmiques de calcul approché de valeurs / vecteurs propres (par exemple la méthode de la puissance ou la méthode QR ; les disques de Gerschgörin).

Date: Année 2022–2023.

Il faudra trouver un équilibre entre ces 3 aspects mais, dans la mesure où vous traitez sérieusement chacun d'eux, vous pouvez privilégier l'un ou l'autre selon vos goûts.

Parmi les références utiles pour cette leçon on peut citer [Se] et [Ro]. Notons que le jury est en droit de vous demander de calculer explicitement des valeurs propres ou espaces propres pour des exemples de matrices.

3. Exercices

Exercice 1. Donner des exemples de matrices non trigonalisables, et de matrices trigonalisables mais non diagonalisables. (On pourra discuter selon le corps de base choisi.)

On se place sur un corps $\Bbbk$, et on note V un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie. Si $f \in \mathrm{End}(V)$, on notera μ_f son polynôme minimal, et χ_f son polynôme caractéristique.

Exercice 2.
(1) Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est diagonalisable ;
   (b) f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
   (c) μ_f est scindé à racines simples.
(2) Peut-on caractériser la diagonalisabilité en termes de χ_f ?

Exercice 3. Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) f est trigonalisable ;
(2) χ_f est scindé ;
(3) μ_f est scindé ;
(4) f admet un polynôme annulateur scindé.

Dans les exercices suivants on s'intéresse à des résultats de codiagonalisation et cotrigonalisation. Le cas le plus classique est le suivant.

Exercice 4.
(1) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de V qui codiagonalise tous les f_i, c'est-à-dire dans laquelle les matrices de tous les f_i sont diagonales.
(2) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de V qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de V qui cotrigonalise tous les f_i, c'est-à-dire dans laquelle les matrices de tous les f_i sont triangulaires supérieures.

Si une famille d'endomorphismes est codiagonalisable, alors ces endomorphismes commutent deux à deux (puisque les matrices diagonales commutent entre elles). Le résultat de l'exercice précédent est donc optimal en ce qui concerne la codiagonalisation. Par contre, des endomorphismes cotrigonalisables ne commutent pas nécessairement entre eux ; pour la cotrigonalisation, on peut donc espérer obtenir des résultats sous des hypothèse plus faibles. Le but de l'exercice suivant est de démontrer un exemple d'un tel résultat, dans lequel l'hypothèse de commutation est remplacée par une hypothèse moins contraignante (mais on impose par contre d'avoir une certaine structure sur l'ensemble d'endomorphismes considéré).

On rappelle que si H est un groupe, son sous-groupe dérivé $\mathscr{D}(H)$ est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g, h \in H$. On rappelle que $\mathscr{D}(H)$ est un sous-groupe distingué de H, et que le groupe quotient $H/\mathscr{D}(H)$ est abélien.

On définit le sous-groupe $\mathscr{D}^n(H) \subset H$ par récurrence, en posant

$$\mathscr{D}^0(H) = H, \quad \mathscr{D}^{n+1}(H) = \mathscr{D}(\mathscr{D}^n(H)) \text{ pour } n \geq 0.$$

On vérifie facilement que chaque $\mathscr{D}^n(H)$ est un sous-groupe distingué de H. On rappelle que H est dit *résoluble* si $\mathscr{D}^n(H) = \{1\}$ pour n entier assez grand.

Exercice 5 (Théorème de Lie–Kolchin)**.** Dans cet exercice on suppose que $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Le but est de démontrer le *Théorème de Lie–Kolchin*, qui affirme que si $G \subset \mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe résoluble connexe (pour la distance induite par n'importe quel choix de norme sur $\mathrm{End}(V)$) alors il existe une base de V dans laquelle les matrices de tous les éléments de G sont triangulaires supérieures.

(1) Soit $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe connexe. Montrer que chaque $\mathscr{D}^n(G)$ est un sous-groupe connexe de G.

(2) Le but de cette question est de montrer que si $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe connexe résoluble non abélien, il existe un sous-espace vectoriel $W \subset V$ non trivial (c'est-à-dire strict et non nul) qui est stable par tous les éléments de G.

   (a) On note $\ell \geq 1$ le plus entier tel que $\mathscr{D}^\ell(G) = \{1\}$. (On a $\ell \geq 2$ puisque G est non abélien.) Montrer que $H := \mathscr{D}^{\ell-1}(G)$ est un sous-groupe distingué connexe abélien et non trivial de G.

   (b) Montrer que l'ensemble

   $$E := \{v \in V \smallsetminus \{0\} \mid \forall h \in H, \, h(v) \in \mathbb{C}v\}$$

   est non vide.

   (c) Si $v \in E$, pour tout $h \in H$, on note $\alpha_v(h)$ le nombre complexe tel que $h(v) = \alpha_v(h) \cdot v$. Montrer que si $v \in E$ et si $g \in G$, alors $g(v) \in E$ et

   $$\alpha_{g(v)}(h) = \alpha_v(g^{-1}hg)$$

   pour tout $h \in H$.

   (d) Montrer que si $v \in E$ la fonction $\alpha_v : H \to \mathbb{C}$ est continue.

   (e) On fixe $v \in E$ et $h \in H$. Notons $\lambda := \alpha_v(h)$ la valeur propre pour laquelle v est vecteur propre de h. Montrer que pour tout $g \in G$ le vecteur $g(v)$ est vecteur propre de h pour la valeur propre λ. (On pourra utiliser les deux questions précédentes, et remarquer que l'ensemble des valeurs propres de h est fini.)

   (f) On fixe $v \in E$, et on note W le sous-espace de V engendré les vecteurs $g(v)$ avec $g \in G$ et $v \in E$. Montrer que W est un sous-espace non trivial de V stable par tous les éléments de G. (Indication : pour montrer que $W \neq V$, on raisonnera par l'absurde, et on montrera que si $W = V$ tout élément de H est une homothétie de déterminant 1.)

(3) Démontrer le théorème de Lie–Kolchin par récurrence sur $\dim(V)$.

(4) Montrer que si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe résoluble connexe, alors G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures.

(5) La réciproque de l'assertion de la question précédente est-elle vraie ?

Référence : [CG, Exercice IV.B.6].

4. Complément 1 : la méthode QR

Les énoncés qui suivent sont tirés de [Se, §10.2].

4.1. **La factorisation QR.** On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires. L'énoncé suivant est classique ; voir par exemple [Se, Prop. 8.3.1].

Proposition 1. Pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux réels positifs tel que $M = QR$.

Notons que pour R comme dans cet énoncé, comme R est inversible ses coefficients diagonaux sont automatiquement *strictement* positifs. La décomposition de M comme produit QR comme dans cette proposition est appelée *décomposition QR* de M. Cette décomposition satisfait la propriété suivante de continuité.

Proposition 2. Soit $(M_k : k \geq 0)$ une suite de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, qui converge vers une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Considérons les décompositions QR des matrices M_k et M :

$$M_k = Q_k R_k, \quad M = QR.$$

Alors la suite $(Q_k : k \geq 0)$ converge vers Q, et la suite $(R_k : k \geq 0)$ converge vers R.

Démonstration. Montrons tout d'abord la convergence de la suite $(Q_k : k \geq 0)$. Puisque $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est compact, pour cela il suffit de montrer que cette suite n'a qu'une valeur d'adhérence. Mais si $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ est une fonction strictement croissante et si la suite $(Q_{\varphi(k)} : k \geq 0)$ converge vers une matrice $Q' \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, puisque $R_{\varphi(k)} = (Q_{\varphi(k)})^{-1} M_{\varphi(k)}$ pour tout k, la suite $(R_{\varphi(k)} : k \geq 0)$ converge vers $R' := (Q')^{-1} M$. De plus, puisque chaque $R_{\varphi(k)}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux réels positifs il en est de même de R'. Donc $M = Q'R'$ est la décomposition QR de M, ce qui implique que $Q' = Q$ par unicité dans la Proposition 1 et termine la preuve.

Une fois qu'on sait que $(Q_k : k \geq 0)$ converge vers Q, en utilisant la formule $R_k = (Q_k)^{-1} M_k$ on obtient que $(R_k : k \geq 0)$ converge vers R. □

Remarque 2. En d'autres termes, en notant $X \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux réels positifs, on a démontré que la multiplication des matrices induit un homéomorphisme

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times X \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

4.2. **La méthode QR.** Fixons $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On définit une suite $(A_k : k \geq 1)$ de la façon suivante. On pose $A_1 = A$ puis, si A_k est définie, on pose

$$A_{k+1} = R_k Q_k$$

où $A_k = Q_k R_k$ est la décomposition QR de A_k.

Théorème 1. Supposons qu'on peut écrire

$$A = Y^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)Y$$

où Y admet une décomposition LU [1] et

$$|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n|. \tag{1}$$

Alors la partie strictement triangulaire inférieure de A_k converge vers 0, et sa partie diagonale converge vers la matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Pour démontrer le théorème on utilisera deux lemmes préliminaires.

Lemme 1. Pour tout $k \geq 1$ on pose

$$P_k = Q_1 \cdots Q_k, \quad S_k = R_k \cdots R_1.$$

Alors pour tout $k \geq 1$ on a $A^k = P_k S_k$, et ceci est la décomposition QR de A^k.

Démonstration. Pour tout $k \geq 1$ on a

$$P_{k+1}S_{k+1} = P_k A_{k+1} S_k.$$

Or on a

$$A_{k+1} = R_k Q_k = (Q_k)^{-1} A_k Q_k = \cdots = (Q_k)^{-1} \cdots (Q_1)^{-1} A Q_1 \cdots Q_k = (P_k)^{-1} A P_k.$$

Donc $P_k A_{k+1} = A P_k$, puis

$$P_{k+1}S_{k+1} = A P_k S_k.$$

On conclut ensuite par une récurrence immédiate. □

Lemme 2. La suite $(R_k : k \geq 1)$ est bornée.

Démonstration. Pour tout $k \geq 1$ on a

$$R_k = (Q_k)^{-1} A_k.$$

Si on note $\|\cdot\|_2$ la norme subordonnée à la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$, on a donc $\|R_k\|_2 = \|A_k\|_2$. D'autre part, pour tout $k \geq 1$ on a

$$A_{k+1} = (Q_k)^{-1} A_k Q_k,$$

et donc pour la même raison on a $\|A_{k+1}\|_2 = \|A_k\|_2$. Donc la suite $(A_k : k \geq 1)$ est bornée, ce qui implique l'énoncé. □

Preuve du Théorème 1. Écrivons $Y = LU$ pour la décomposition LU de Y, et $Y^{-1} = QR$ pour la décomposition QR de Y^{-1}. Notons également D la matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Pour tout $k \geq 1$ on a

$$A^k = Y^{-1} D^k Y = QRD^k LU.$$

En utilisant l'hypothèse (1), on voit que la suite $(D^k L D^{-k} : k \geq 1)$ converge vers I_n ; en d'autres termes, si on note $D^k L D^{-k} = \mathrm{I}_n + E_k$ alors la suite $(E_k : k \geq 1)$ tend vers 0.

En utilisant le Lemme 1 on voit que pour tout $k \geq 1$ on a

$$P_k S_k = QR(\mathrm{I}_n + E_k) D^k U = Q(\mathrm{I}_n + R E_k R^{-1}) R D^k U.$$

---

1. On rappelle qu'une matrice M *admet une décomposition* LU si elle s'écrit comme produit $M = LU$ avec L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U triangulaire supérieure. Une telle écriture est unique si elle existe, et est appelée *décomposition* LU de M.

La suite $(\mathrm{I}_n + RE_kR^{-1} : k \geq 1)$ tend vers I_n ; donc, si on note

$$\mathrm{I}_n + RE_kR^{-1} = O_kT_k$$

la décomposition QR de $\mathrm{I}_n + RE_kR^{-1}$, la Proposition 2 implique que les suites $(O_k : k \geq 1)$ et $(T_k : k \geq 1)$ tendent vers I_n, et on a

$$P_kS_k = (QO_k)(T_kRD^kU).$$

Notons maintenant

$$|D| = \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|), \quad D_1 = |D|^{-1}D.$$

Considérons également les coefficients diagonaux $(u_{i,i} : i \in \{1, \cdots, n\})$ de U et posons

$$D_2 = \mathrm{diag}\left(\frac{u_{1,1}}{|u_{1,1}|}, \cdots, \frac{u_{n,n}}{|u_{n,n}|}\right), \quad U' = (D_2)^{-1}U.$$

On a alors

$$P_kS_k = (QO_k(D_1)^kD_2)((D_2)^{-1}(D_1)^{-k}T_kR(D_1)^kD_2|D|^kU')$$

où, dans le produit, la première matrice est unitaire et la deuxième est triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux réels positifs. Par unicité de la décomposition QR (voir la Proposition 1), on a donc pour tout $k \geq 1$

$$P_k = QO_k(D_1)^kD_2, \quad S_k = (D_2)^{-1}(D_1)^{-k}T_kR(D_1)^kD_2|D|^kU'.$$

Il s'ensuit que

$$Q_k = (P_{k-1})^{-1}P_k = (D_2)^{-1}(D_1)^{1-k}(O_{k-1})^{-1}O_k(D_1)^kD_2$$

et

$$R_k = S_k(S_{k-1})^{-1} = (D_2)^{-1}(D_1)^{-k}T_kR|D|D_1R^{-1}(T_{k-1})^{-1}(D_1)^{k-1}D_2.$$

On a alors

$$Q_k - D_1 = (D_2)^{-1}(D_1)^{1-k}((O_{k-1})^{-1}O_k - \mathrm{I}_n)(D_1)^kD_2.$$

Ici les suites $((D_2)^{-1}(D_1)^{1-k} : k \geq 1)$ et $((D_1)^kD_2 : k \geq 1)$ sont bornées, et la suite $((O_{k-1})^{-1}O_k - \mathrm{I}_n : k \geq 1)$ tend vers 0. On en déduit que

$$Q_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} D_1.$$

De la même façon, si on pose

$$R'_k = (D_2)^{-1}(D_1)^{-k}R|D|D_1R^{-1}(D_1)^{k-1}D_2$$

alors on a $R_k - R'_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Finalement, on remarque que

$$A_k = Q_kR_k = (Q_k - D_1)R_k + D_1R_k = (Q_k - D_1)R_k + D_1R'_k + D_1(R_k - R'_k).$$

Dans cette écriture le troisième terme tend vers 0, et le premier également grâce au Lemme 2. Puisque $D_1R'_k$ est triangulaire supérieure et que sa partie diagonale est la même que celle de $D_1|D| = D$, ceci conclut la preuve. □

5. Complément 2 : les disques de Gershgörin

Les énoncés qui suivent sont tirés de [Ro].

5.1. **Énoncé.** Pour $x \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on note $\overline{\mathrm{D}}(x,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-x| \leq r\}$.

Proposition 3. Soit $A = (a_{i,j} : 1 \leq i,j \leq n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on note

$$L_i = \sum_{\substack{j \in \{1,\cdots,n\} \\ i \neq j}} |a_{i,j}|.$$

Alors on a

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{D}}(a_{i,i}, L_i).$$

Démonstration. Soit λ une valeur propre de A, et soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé qui vérifie $\|x\|_\infty = 1$. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $|x_i| = 1$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i,$$

et donc

$$x_i \cdot (\lambda - a_{i,i}) = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j.$$

En prenant les modules on en déduit que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq L_i,$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque 3. (1) Si on pose

$$L = \max_i (L_i + |a_{i,i}|),$$

cette proposition montre que toute valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| \leq L$.

(2) Si on pose

$$C_j = \sum_{\substack{i \in \{1,\cdots,n\} \\ i \neq j}} |a_{i,j}|,$$

en appliquant la proposition à la transposée de A, dont le spectre est le même que celui de A, on obtient qu'on a également

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_j \overline{\mathrm{D}}(a_{j,j}, C_j).$$

5.2. **Application.** Une application classique de la Proposition 3 est la suivante. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *à diagonale strictement dominante* si pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Proposition 4. Toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Démonstration. Cela découle de la Proposition 3, puisque 0 n'est dans aucun des disques $\overline{\mathrm{D}}(a_{i,i}, L_i)$. □

Références

[CG] P. Caldero et J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome I*, Calvage & Mounet, 2017.

[Ro] J.-É. Rombaldi, *Analyse matricielle - Cours et exercices résolus*, EDP Sciences, 1999.

[Se] D. Serre, *Les matrices, théorie et pratique*, Dunod, 2001.