# PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : RAPPELS DE TOPOLOGIE

SIMON RICHE

## 1. Programme (session 2025)

1.1. **Topologie et espaces métriques.** (a) Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

(b) Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

(c) Compacité. Équivalence des définitions en termes de valeurs d'adhérence (Bolzano–Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel–Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

(d) Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.

(e) Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

1.2. **Espaces vectoriels normés sur R ou C.** (a) Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

(b) Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

(c) Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de Banach.

(d) Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

1.3. **Espaces de Hilbert.** (a) Espaces préhilbertiens.

(b) Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

(b) Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces $\ell^2$ et $L^2$. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux.

## 2. Topologie et espaces métriques

### 2.1. Espaces métriques.

**Définition 2.1.1** (Espace métrique)**.** Un *espace métrique* est un couple $(E, d)$ où $E$ est un ensemble et $d$ une distance sur $E$, c'est-à-dire une application $E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

(1) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ ;

---

*Date*: Année 2024-2025.

(2) pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$ ;
(3) pour tous $x, y, z \in E$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

**Exemple 2.1.2.** (1) $E$ ensemble quelconque, muni de la distance $d$ définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Un tel espace métrique est appelé *espace métrique discret*.

(2) $E = \mathbb{R}$, muni de la distance définie par $d(x,y) = |x-y|$.

Si $(E,d)$ est un espace métrique et $A \subset E$ est une partie de $E$, pour $x \in E$ on note

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

On appelle cette quantité la distance de $x$ à $A$.

**Définition 2.1.3** (Boules)**.** Fixons un espace métrique $(E,d)$. Étant donnés $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, la *boule ouverte* de centre $x$ et de rayon $r$ est

$$\mathrm{B_o}(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) < r\}.$$

De même, la *boule fermée* de centre $x$ et de rayon $r$ est

$$\mathrm{B_f}(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) \leq r\}.$$

**Définition 2.1.4** (Ouverts, fermés)**.** Une partie $X$ de $E$ est dite *ouverte* si $X = \varnothing$ ou si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B_o}(x,r) \subset X$.

Une partie $X$ de $E$ est dite *fermée* si $E \smallsetminus X$ est ouverte.

**Exemple 2.1.5.** Pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $\mathrm{B_o}(x,r)$ est un ouvert de $E$ et $\mathrm{B_f}(x,r)$ est un fermé de $E$.

**Remarque 2.1.6.** L'ensemble des parties ouvertes de $E$ est appelé la *topologie* de $E$. Il existe une notion d'*espace topologique*, dont un exemple est celui donné par l'ensemble sous-jacent à un espace métrique, muni de ses parties ouvertes. Il s'agit d'une théorie intéressante, mais qui n'est *pas* au programme de l'agrégation.

**Exercice 2.1.7.** Si $E$ est un espace métrique discret, déterminer les parties ouvertes et les parties fermées de $E$.

**Proposition 2.1.8.** (1) Une réunion de parties ouvertes est ouverte. Une intersection *finie* de parties ouvertes est ouverte.

(2) Une intersection de parties fermées est fermée. Une réunion *finie* de parties fermées est fermée.

**Exercice 2.1.9.** Montrer que, dans un espace métrique, une intersection de parties ouvertes n'est pas nécessairement ouverte, et une réunion de parties fermées n'est pas nécessairement fermée.

**Définition 2.1.10** (Adhérence, intérieur)**.** Soit $A$ une partie de $E$.

(1) L'*adhérence* $\overline{A}$ de $A$ est l'intersection de toutes les parties fermées de $E$ contenant $A$. C'est “le plus petit fermé de $E$ contenant $A$” au sens où c'est un fermé contenant $A$ et contenu dans tout fermé contenant $A$.

(2) $A$ est dite *dense* si $\overline{A} = E$.

(3) L'*intérieur* $\mathring{A}$ de $A$ est la réunion de toutes les parties ouvertes de $E$ contenues dans $A$. C'est "le plus grand ouvert contenu dans $A$" au sens où c'est un ouvert contenu dans $A$ et contenant tous les ouverts contenus dans $A$.

**Exercice 2.1.11.** Si $E = \mathbb{R}$ (muni de sa distance standard) et $A$ est un intervalle, déterminer $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

Si $(E, d)$ est un espace métrique et $A \subset E$ une partie de $E$, alors la restriction de $d$ à $A \times A$ définit une distance $d_A$ sur $A$, faisant de $(A, d_A)$ un espace métrique.

**Proposition 2.1.12.** Soit $(E, d)$ un espace métrique, et $A \subset E$ une partie de $E$.

(1) Les parties ouvertes de l'espace métrique $(A, d_A)$ sont les sous-ensembles de la forme $U \cap A$ avec $U \subset E$ ouvert de $(E, d)$.
(2) Les parties fermées de l'espace métrique $(A, d_A)$ sont les sous-ensembles de la forme $F \cap A$ avec $F \subset E$ fermé de $(E, d)$.

**Lemme 2.1.13.** Si $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ sont des espace métriques, alors on définit une distance sur l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ en posant

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

**Définition 2.1.14** (Produit d'espace métriques)**.** L'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$, muni de la distance du Lemme 2.1.13, est appelé l'espace produit des $(E_i, d_i)$.

2.2. **Suites.** On fixe un espace métrique $(E, d)$.

**Définition 2.2.1** (Suite convergente)**.** Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $E$ et $x \in E$. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x$, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{ou} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

si $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $d(x_n, x) < \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est dite *convergente* s'il existe $x \in E$ tel que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x$ ; dans ce cas $x$ est appelé la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. (Cette limite est unique si elle existe.)

**Remarque 2.2.2.** Insistons sur le fait qu'écrire le symbole $\lim_{n\to+\infty} x_n$ affirme en particulier que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge. Si ce fait n'est pas évident, il est indispensable de démontrer la convergence *avant* de l'écrire !

**Proposition 2.2.3** (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**.** Soit $A$ une partie de $E$, et soit $x \in E$. Alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $A$ qui converge vers $x$. En particulier, $A$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $A$ qui est convergente (dans l'espace métrique $(E, d)$) la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ appartient à $A$.

**Exercice 2.2.4.** Si $A$ est une partie de $E$, montrer que

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathring{A} = \{x \in E \mid d(x, E \smallsetminus A) > 0\}.$$

**Définition 2.2.5** (Valeur d'adhérence)**.** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $(E, d)$. On dit qu'un point $a \in E$ est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_{n\geq 0}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il existe $n \geq p$ tel que $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $(E,d)$, on appelle *sous-suite* (ou *suite extraite*) de $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de la forme $(y_n)_{n\geq 0}$ où $y_n = x_{\varphi(n)}$ pour une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

**Proposition 2.2.6.** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $(E,d)$, et soit $a \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $a$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ ;
(2) il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers $a$ ;
(3) $a$ appartient à $\bigcap_{p\geq 0} \overline{\{x_n : n \geq p\}}$.

En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ est fermé.

## 2.3. Continuité.

**Définition 2.3.1** (Continuité)**.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, soit $f : E \to E'$ une application, et soit $a \in E$. On dit que $f$ est *continue en $a$* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $d(x,a) < \alpha$ on a $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

On dit que $f$ est continue si elle est continue en tout point de $E$.

**Exercice 2.3.2.** Donner des exemples d'applications continues et non continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en justifiant).

**Proposition 2.3.3.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est continue ;
(2) pour tout ouvert $U \subset E'$, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $E$ ;
(3) pour tout fermé $F \subset E'$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans $E$.

*Référence* : [Po, Thm. 2.8.4].

**Proposition 2.3.4** (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, soit $f : E \to E'$ une application, et soit $a \in E$. L'application $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de $E$ convergeant vers $a$, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

**Définition 2.3.5.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, et soit $f : E \to E'$ une application. On dit que $f$ est un *homéomorphisme* si

- $f$ est continue ;
- $f$ est bijective ;
- $f^{-1} : E' \to E$ est continue.

**Remarque 2.3.6.** Deux espaces métriques homéomorphes "ont la même topologie" au sens où si une propriété peut s'exprimer uniquement en termes d'ouverts ou de fermés (par exemple, la compacité ou la connexité), alors un espace a cette propriété si et seulement si l'autre l'a.

**Exercice 2.3.7.** (1) Donner un exemple d'application continue bijective entre deux espaces métriques qui n'est pas un homéomorphisme.

(2) Montrer que, si $(E,d)$ est un espace métrique, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $E$ est homéomorphe à un espace métrique discret ;
   (b) tout sous-ensemble $A \subset E$ est ouvert ;
   (c) pour tout $x \in E$, $\{x\}$ est ouvert dans $E$ ;
   (d) pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$ tel que $\{x\} = \mathrm{B_o}(x,r)$.

2.4. **Compacité.**

**Définition 2.4.1** (Précompacité)**.** Un espace métrique $(E, d)$ est dit *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de $E$ par des boules ouvertes de rayon $\varepsilon$.

**Exercice 2.4.2.**
(1) Montrer qu'un espace métrique $(E, d)$ est précompact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de $E$ par des boules *fermées* de rayon $\varepsilon$.
(2) En déduire que si $(E, d)$ est un espace métrique et si $X \subset E$ est une partie de $E$ qui est précompacte, alors $\overline{X}$ est également précompacte.

**Définition 2.4.3** (Compacité)**.** Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que $(E, d)$ est *compact* s'il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :
(1) si $(U_i : i \in I)$ est une famille d'ouverts de $E$ telle que $E = \bigcup_{i \in I} U_i$, alors il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $E = \bigcup_{i \in J} U_i$ ;
(2) si $(F_i : i \in I)$ est une famille de fermés de $E$ telle que $\varnothing = \bigcap_{i \in I} F_i$, alors il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $\varnothing = \bigcap_{i \in J} F_i$.

**Remarque 2.4.4.**
(1) Un espace topologique compact est précompact.
(2) L'espace métrique $\mathbb{R}$ n'est pas précompact, et donc pas compact.

**Théorème 2.4.5** (Théorème de Bolzano–Weierstrass, ou de Borel–Lebesgue)**.** Un espace métrique $(E, d)$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de $E$ admet une valeur d'adhérence.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §3.2, Thm. 1].

**Exemple 2.4.6.** Pour tous réels $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est compact.

*Référence* : voir [Po, Thm. 4.1.3] pour une preuve en termes de la propriété de Borel–Lebesgue. Pour une preuve en termes de la propriété de Bolzano–Weierstrass, on peut procéder par dichotomie, en utilisant le fait qu'étant donnée une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de $[a, b]$, l'un au moins des intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$ contient une infinité de termes de la suite.

**Proposition 2.4.7.**
(1) Si $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, l'espace $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la distance produit) est compact si et seulement si chaque $(E_i, d_i)$ est compact.
(2) Si $(E, d)$ est un espace métrique compact et $F \subset E$ une partie fermée, alors $F$ (muni de la distance induite) est compact.
(3) Si $(E, d)$ est un espace métrique et $F \subset E$ une partie qui est compacte (pour la distance induite) alors $F$ est fermée et bornée (c'est-à-dire contenue dans une boule).

**Corollaire 2.4.8.** Les parties compactes de $\mathbb{R}$ (pour la distance $d(x, y) = |x - y|$) sont les parties fermées bornées.

*Référence* : [Po, Cor. 4.2.6].

**Proposition 2.4.9** (Continuité et compacité)**.**
(1) Soient $(E, d)$ et $(E', d')$ des espaces métriques, et soit $f : E \to E'$ une application continue. Pour toute partie compacte $A \subset E$, $f(A) \subset E'$ est compacte.

(2) Soient $(E, d)$ et $(E', d')$ des espaces métriques, et soit $f : E \to E'$ une application continue et bijective. Si $(E, d)$ est compact alors $f$ est un homéomorphisme.
(3) Soient $(E, d)$ un espace compact et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.

*Référence* : [Po, Thm. 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3].

2.5. **Connexité.**

**Définition 2.5.1** (Connexité)**.** Un espace métrique $(E, d)$ est dit *connexe* s'il vérifie une des propriétés équivalentes suivantes :
(1) il n'existe pas d'ouverts $U, V \subset E$ disjoints et non vides tels que $E = U \cup V$ ;
(2) il n'existe pas de fermés $F, G \subset E$ disjoints et non vides tels que $E = F \cup G$ ;
(3) les seules parties ouvertes et fermées de $E$ sont $\varnothing$ et $E$.

*Référence* : pour l'équivalence entre ces propriétés, voir [G2, Chap. 1, §4.1, Prop. 1].

**Exercice 2.5.2.** Donner des exemples d'espaces métriques connexes et d'espaces métriques non connexes.

**Proposition 2.5.3.** (1) Soient $(E, d)$ et $(E', d')$ des espaces métriques et $f : E \to E'$ une application continue. Si $E$ est connexe, alors $f(E)$ est connexe.
(2) Si $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la distance produit) est connexe si et seulement si chaque $(E_i, d_i)$ est connexe.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §4.2, Thm. 1 et Prop. 7].

**Corollaire 2.5.4.** Un espace métrique $(E, d)$ est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ est constante.

**Proposition 2.5.5.** Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §4.2, Thm. 2]. Notons qu'une conséquence immédiate de cette proposition et de la Proposition 2.5.3 est le Théorème des Valeurs Intermédiaires : pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et toute application continue $f : I \to \mathbb{R}$, $f(I)$ est un intervalle.

**Définition 2.5.6** (Composantes connexes)**.** Soit $(E, d)$ un espace métrique. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $E$ en posant que $x \sim y$ si et seulement si il existe une partie connexe de $E$ contenant $x$ et $y$. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées les *composantes connexes* de $E$. Elles forment une partition de $E$.

**Proposition 2.5.7.** Chaque composante connexe de $E$ est fermée et connexe. Si $E$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, celles-ci sont ouvertes.

**Remarque 2.5.8.** Les composantes connexes ne sont pas toujours ouvertes. Pour un exemple, voir par exemple [Sk, p. 90].

**Définition 2.5.9** (Connexité par arcs)**.** Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que $(E, d)$ est *connexe par arcs* si pour tous $a, b \in E$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

**Proposition 2.5.10.** Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §4.3, Thm. 4].

2.6. **Formes fortes de continuité.**

**Définition 2.6.1** (Uniforme continuité)**.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. On dit que $f$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x,y \in E$ tels que $d(x,y) < \alpha$ on a $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

**Remarque 2.6.2.** L'uniforme continuité est une notion *métrique* et non une notion topologique : elle dépend de la distance choisie, et non uniquement de la donnée des parties ouvertes. Par exemple, étant donnés un homéomorphisme $f : E_1 \to E_2$ et une application $g : E_2 \to E_3$, il n'est *pas* vrai que $g$ est uniformément continue si et seulement si $g \circ f$ est uniformément continue.

**Définition 2.6.3** (Applications lipschitziennes)**.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. On dit que $f$ est *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que pour tous $x,y \in E$ on a

$$d'(f(x),f(y)) \leq k \cdot d(x,y).$$

**Remarque 2.6.4.** On a les implications suivantes :

$$\text{lipschitzienne} \;\Rightarrow\; \text{uniformément continue} \;\Rightarrow\; \text{continue.}$$

**Exercice 2.6.5.** Montrer que si $(E,d)$ est un espace métrique et si $a \in E$, l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(a,x) \end{array} \right.$$

est continue (pour la distance naturelle sur $\mathbb{R}$).

**Théorème 2.6.6** (Théorème de Heine)**.** Soient $(E,d)$ et $(E',d')$ des espaces métriques, et soit $f : (E,d) \to (E',d')$ une application continue. Si $(E,d)$ est compact, alors $f$ est uniformément continue.

*Référence* : [Qu, Chap. 3, Théorème IV.5] ou [Po, Théorème 5.4.1].

**Exercice 2.6.7.** Donner des exemples :
— d'une application continue mais non uniformément continue ;
— d'une application uniformément continue mais non lipschitzienne.

**Remarque 2.6.8.** Une façon très courante de montrer qu'une fonction d'une variable réelle est lipschitzienne est d'utiliser le Théorème des Accroissements Finis. Par exemple, celui-ci implique que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable dont la dérivée est bornée, alors $f$ est lipschitzienne.

2.7. **Espaces métriques complets.**

**Définition 2.7.1** (Suites de Cauchy)**.** Soit $(E,d)$ un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $E$. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que pour tous $p,q \geq N$ on a $d(x_p,x_q) < \varepsilon$.

**Remarque 2.7.2.** Dans un espace métrique quelconque, toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque n'est pas vraie en général.

**Définition 2.7.3** (Complétude)**.** Soit $(E,d)$ un espace métrique. On dit que $E$ est *complet* si toute suite de Cauchy de $E$ converge.

**Exemple 2.7.4.** L'espace métrique $\mathbb{R}$, muni de la distance naturelle, est complet. (Voir la Remarque 2.7.10 ci-dessous pour une preuve possible de cette propriété.)

**Remarque 2.7.5.** La complétude n'est *pas* une notion topologique. Par exemple, les espaces métriques $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes, mais l'un est complet et l'autre ne l'est pas.

**Proposition 2.7.6.** Si $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ (muni de la distance produit) est complet si et seulement si chaque $(E_i, d_i)$ est complet.

**Théorème 2.7.7** (Théorème du point fixe pour les applications contractantes)**.** Soit $(E, d)$ un espace métrique complet non vide, et soit $f : E \to E$ une application contractante, c'est-à-dire telle qu'il existe $k \in ]0,1[$ tel que pour tous $x, y \in E$ on a

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Alors il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §2.3, Thm. 1].

**Remarque 2.7.8.** Même s'il est simple à démontrer, le théorème du point fixe a des applications très importantes, notamment au théorème de Cauchy–Lipschitz ou à celui des fonctions implicites. Il est également à la base de la "méthode de Newton" (cf. [Sk, p. 113-114]) ; pour d'autres applications, voir [Qu, Chap. 5, §II.3].

**Proposition 2.7.9.** Un espace métrique est compact si et seulement si il est complet et précompact. En particulier, on a l'implication

$$\text{compact} \;\Rightarrow\; \text{complet}.$$

*Référence* : [G2, Chap. 1, §3.5, Ex. 2].

**Remarque 2.7.10.** Puisqu'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact (voir Exemple 2.4.6), il est complet d'après la Proposition 2.7.9. Puisque toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est bornée, ceci montre donc que $\mathbb{R}$ (muni de la distance définie par $d(x, y) = |x - y|$) est complet, cf. Exemple 2.7.4.

2.8. **Convergence uniforme.**

**Définition 2.8.1** (Convergence uniforme)**.** Soient $X$ un ensemble, $(E, d)$ un espace métrique, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $X$ dans $E$, et soit $f$ une fonction de $X$ dans $E$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément vers* $f$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$ on a $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Notons $\mathscr{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions de $X$ and $E$. Pour $f, g \in \mathscr{F}(X, E)$ on note

$$d(f, g) = \min\left(1, \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))\right)$$

(où le sup vaut $\infty$ si l'ensemble n'est pas majoré, et dans ce cas $\min(1, \infty) = 1$).

**Lemme 2.8.2.** La fonction $d$ est une distance sur $\mathscr{F}(X, E)$ (appelée *distance de la convergence uniforme*). Une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{F}(X, E)$ converge uniformément vers une fonction $f$ si et seulement si elle converge vers $f$ pour la distance $d$.

**Proposition 2.8.3.** Soient $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, soit $x_0 \in X$, soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $X$ dans $Y$, et soit $f$ une fonction de $X$ dans $Y$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f$ et si chaque $f_n$ est continue en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.

*Référence* : [G2, Chap. 4, §3.2, Thm. 2].

**Proposition 2.8.4.** Soient $X$ un ensemble, et $(Y, d_Y)$ un espace métrique.

(1) Si $(Y, d_Y)$ est complet, alors $(\mathscr{F}(X, Y), d)$ est complet.

(2) Si $d_X$ est une distance sur $X$, alors le sous-ensemble $\mathscr{C}(X, Y)$ des applications continues de $(X, d_X)$ vers $(Y, d_Y)$ est fermé dans $\mathscr{F}(X, Y)$. En particulier, si $(Y, d_Y)$ est complet, la restriction de $d$ à $\mathscr{C}(X, Y)$ en fait un espace métrique complet.

*Référence* : pour une preuve de (1), voir [Po, Exemples 3.1.3] (cette preuve suppose que $Y = \mathbb{R}$, mais elle s'applique en fait à tout espace complet) ou [G2, Chap. 4, §3.1, Proposition 1]. L'énoncé (2) est une conséquence de la Proposition 2.8.3.

**Remarque 2.8.5.** Si $(X, d_X)$ est un espace métrique compact, alors il est plus naturel de considérer sur $\mathscr{C}(X, Y)$ la fonction définie par

$$\max_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Cette application est une distance, qui fait également de $\mathscr{C}(X, Y)$ un espace métrique complet.

## 3. Espaces vectoriels normés

Dans cette partie on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Les deux cas sont semblables, et souvent traités en parallèle.)

### 3.1. Définition.

**Définition 3.1.1** (Espaces vectoriels normés)**.** Un *espace vectoriel normé* (sur $\mathbb{K}$) est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$, c'est-à-dire une application de $E$ vers $\mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

(1) on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ ;

(2) pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;

(3) pour tous $x, y \in E$ on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**Lemme 3.1.2.** Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur $E$. Elle munit donc $E$ d'une structure d'espace métrique.

**Exemple 3.1.3.** (1) Pour tout $n \geq 1$, l'application

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie par

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$. Notons que la distance associée à cette norme est la distance produit obtenue à partir de la distance sur $\mathbb{K}$ définie par $d(x, y) = |x - y|$.

(2) Pour tout $n \geq 0$ et tout réel $p \geq 1$, l'application

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie par
$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$
est une norme sur $\mathbb{K}^n$. (La propriété non évidente dans cette affirmation est que cette fonction vérifie l'inégalité triangulaire. Ceci découle de l'inégalité de Minkowsky, voir [G2, Chap. 2, §3.1, Thm. 4].)

**Exercice 3.1.4.** Montrer que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r > 0$, on a
$$\overset{\circ}{\mathrm{B}_{\mathrm{f}}(x,r)} = \mathrm{B}_{\mathrm{o}}(x,r) \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{B}_{\mathrm{o}}(x,r)} = \mathrm{B}_{\mathrm{f}}(x,r).$$
Que peut-on dire si $(E, d)$ est un espace métrique général ?

**Définition 3.1.5** (Normes équivalentes)**.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux normes $N_1$ et $N_2$ sur $E$ sont dites *équivalentes* s'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$ on a
$$a \cdot N_1(x) \leq N_2(x) \leq b \cdot N_1(x).$$

**Lemme 3.1.6.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$, de distances associées $d_1$ et $d_2$. Si $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes, alors $(E, d_1)$ et $(E, d_2)$ ont la même topologie ; en d'autres termes, une partie $A$ de $E$ est ouverte (resp. fermée) dans l'espace métrique $(E, d_1)$ si et seulement si elle est ouverte (resp. fermée) dans l'espace métrique $(E, d_2)$.

**Remarque 3.1.7.** Les notions métriques plutôt que topologiques considérées cidessus (cf. Remarque 2.6.2 par exemple) sont également équivalentes dans $(E, d_1)$ et $(E, d_2)$ ; par exemple, une suite d'éléments de $E$ est de Cauchy par rapport à $d_1$ si et seulement si elle est de Cauchy par rapport à $d_2$.

**Théorème 3.1.8** (Équivalence des normes en dimension finie)**.** Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur $E$ sont équivalentes.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §5.3, Théorème 3] ou [Po, Théorème 6.4.1]. La preuve utilise un argument de compacité utilisant l'Exemple 2.4.6.

L'équivalence des normes en dimension finie signifie que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé avec $E$ de dimension finie, toutes les propriétés "métriques" de $E$ (c'est-à-dire les propriétés n'impliquant que la distance sur de $E$, par exemple la continuité des fonctions) ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.

**Corollaire 3.1.9.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(1) Si $E$ est de dimension finie, alors $E$ est complet.
(2) Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors $F$ est fermé.
(3) Si $E$ est de dimension finie, une partie de $E$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

*Référence* : [Po, Thm. 6.4.2, Thm. 6.4.3 et application suivant le théorème].

**Remarque 3.1.10.** Insistons sur le fait que les 3 propriétés considérées dans le Corollaire 3.1.9 sont *fausses* si on enlève l'hypothèse "de dimension finie".

3.2. **Espaces de Banach.**

**Définition 3.2.1** (Espace de Banach)**.** Un *espace de Banach* (sur $\mathbb{K}$) est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ qui est complet (pour la distance associée à $\|\cdot\|$).

**Exemple 3.2.2.** Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et si $p \geq 1$, on note $\mathrm{L}^p(X)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des classes de fonctions mesurables de $X$ vers $\mathbb{K}$ qui vérifient

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Alors $\mathrm{L}^p(X)$ est un espace vectoriel normé pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Le théorème de Riesz–Fischer (voir [BP, Thm. 9.3]) affirme que cet espace vectoriel normé est complet, donc un espace de Banach.

**Proposition 3.2.3** (Séries dans un espace de Banach)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une famille de vecteurs de $E$ telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Alors la suite $(\sum_{i=0}^{n} x_i)_{n\geq 0}$ converge.

Dans la situation de la Proposition 3.2.3, on dit que la série de terme général $u_n$ est absolument convergente. La limite de la suite $(\sum_{i=0}^{n} x_i)_{n\geq 0}$ est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$.

**Remarque 3.2.4.** Une application très importante de la Proposition 3.2.3 est la construction de l'exponentielle de matrices (ou d'endomorphismes). Pour une autre application classique, voir [G2, Chap. 1, §5.2, Prop. 2].

**Proposition 3.2.5.** Soit $X$ un ensemble et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On note $\mathscr{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $X$ dans $E$.

(1) En posant
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$
on définit une norme sur $\mathscr{B}(X, E)$. Une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{B}(X, E)$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{B}(X, E)$ si et seulement si elle converge vers $f$ pour la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(2) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors $(\mathscr{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(3) Si $d$ est une distance sur $X$, alors le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, E)$ des applications continues bornées de $X$ dans $E$ est fermé dans $\mathscr{B}(X, E)$. En particulier, si $E$ est un espace de Banach, la restriction de la norme $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, E)$ en fait un espace de Banach.

*Référence* : pour une preuve de (2), voir [G2, Chap. 4, §3.1, Rmq. 2]. L'énoncé (3) est une conséquence de la Proposition 2.8.3.

**Remarque 3.2.6.** La norme de la Proposition 3.2.5(1) est appelée *norme de la convergence uniforme*. Remarquons également que dans la Proposition 3.2.5(3), si $(X, d)$ est compact alors $\mathscr{C}_{\mathrm{b}}(X, E)$ est simplement l'espace vectoriel des applications continues de $X$ dans $E$ (voir la Proposition 2.4.9(3)).

3.3. **Applications linéaires continues.**

**Proposition 3.3.1** (Continuité des applications linéaires)**.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f$ est une application continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on a
$$\|f(x)\|_F \leq C \cdot \|x\|_E.$$

*Référence* : [Po, Thm. 6.1.1].

**Remarque 3.3.2.** Pour des exemples d'applications linéaires continues ou non, voir par exemple [Po, Exemples 6.1.2]. Notons en particulier *qu'il existe des applications linéaires non continues.*

**Proposition 3.3.3.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Si $E$ est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

*Référence* : [Po, Thm. 6.4.4]. (Ceci est une application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie.)

**Proposition 3.3.4.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$ des applications linéaires continues de $E$ vers $F$ a une structure naturelle d'espace vectoriel, et en posant
$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F$$
on définit une norme sur cet espace.

**Proposition 3.3.5.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, et soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Alors $\mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, F)$, muni de la norme de la Proposition 3.3.4, est un espace de Banach.

*Référence* : [G2, Chap. 1, §5.2, Thm. 2] ou [Po, p. 46].

**Exemple 3.3.6.** Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé, l'espace vectoriel normé $E' := \mathscr{L}_{\mathrm{c}}(E, \mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ est muni de sa norme naturelle) est un espace de Banach, appelé le *dual topologique* de $E$.

3.4. **Compacité dans un espace vectoriel normé.** D'après le Corollaire 3.1.9, dans un espace vectoriel normé de dimension finie les parties compactes sont les parties fermées bornées. Cette description est *fausse* pour des espaces vectoriels normés généraux. En fait, le théorème de Riesz peut s'interpréter comme disant que cette propriété caractérise, parmi les espaces vectoriels normés, ceux qui sont de dimension finie.

**Théorème 3.4.1** (Théorème de Riesz)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $B_E := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité. Alors $E$ est de dimension finie si et seulement si $B_E$ est compacte.

*Référence* : [Po, Théorème 6.4.5].

Le *théorème d'Ascoli* donne des caractérisations des parties compactes de certains espaces métriques d'applications continues d'un espace métrique compact dans un autre espace métrique. Il en existe plusieurs formes, plus ou moins équivalentes entre elles. On en donne ici trois versions légèrement différentes.

**Définition 3.4.2** (Équicontinuité)**.** Soient $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ des espaces métriques, $(X, d_X)$ étant compact et non vide, et considérons l'espace $\mathscr{C}(X, Y)$ des applications continues de $(X, d_X)$ dans $(Y, d_Y)$, muni de la distance définie par

$$d(f, g) = \max_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Une partie $A$ de $\mathscr{C}(X, Y)$ est dite *équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ et $f \in A$ on a

$$d_X(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

**Remarque 3.4.3.** Ici on a suivi la terminologie de [QZ]. Dans d'autres sources, cette notion est parfois appelée *uniforme équicontinuité*. Étant donné $x \in X$, on dit également que $A$ est *équicontinue en* $x$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y \in X$ et $f \in A$ on a

$$d_X(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On peut montrer que $A$ est équicontinue au sens ci-dessus si et seulement si elle est équicontinue en tout $x \in X$, voir par exemple [Di, Théorème 5.4.4] ou [Sk, Chap. 6, §3, Proposition, p. 146–147].

**Théorème 3.4.4** (Théorème d'Ascoli, version 1)**.** Soit $A$ une partie de $\mathscr{C}(X, Y)$, et supposons $(Y, d_Y)$ compact. Alors $\overline{A}$ est compacte si et seulement si $A$ est équicontinue.

*Référence* : [QZ, Chap. V, Théorème III.1].

**Théorème 3.4.5** (Théorème d'Ascoli, version 2)**.** Soit $A$ une partie de $\mathscr{C}(X, Y)$. Alors $\overline{A}$ est compacte si et seulement si

(1) $A$ est équicontinue ;

(2) pour tout $x \in X$, l'adhérence de $\{f(x) : f \in A\}$ est compacte.

*Référence* : [Sk, Chap. 6, §3, Théorème d'Ascoli].

**Théorème 3.4.6** (Théorème d'Ascoli, version vectorielle)**.** Soit $A \subset \mathscr{C}(X, Y)$, et supposons que $Y$ est un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $\overline{A}$ est compacte si et seulement si $A$ est équicontinue et bornée.

*Référence* : [QZ, Chap. V, Théorème III.3]. Pour une application de cette version du théorème à un problème de Cauchy, voir le théorème d'Arzela–Peano ([QZ, Chap. X, Théorème II.4]).

## 4. Espaces de Hilbert

La théorie des espaces de Hilbert admet une variante pour les espaces vectoriels réels (où le produit scalaire est bilinéaire) et une variante pour les espaces vectoriels complexes (où le produit scalaire est hermitien, c'est-à-dire linéaire d'un côté et semi-linéaire de l'autre). Les deux cas sont semblables, mais il faut faire un choix pour fixer les conventions, et faire attention à s'y tenir...

4.1. **Espaces préhilbertiens.**

**Définition 4.1.1** (Espace préhilbertien)**.** Un *espace préhilbertien (complexe)* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où $E$ est un espace vectoriel complexe et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $E$, c'est-à-dire une application $E \times E \to \mathbb{C}$ qui vérifie :
- pour $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$$
et
$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, z \rangle + \overline{\mu} \langle y, z \rangle;$$
- pour $x, y \in E$, $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ ;
- pour $x \in E \smallsetminus \{0\}$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$.

**Lemme 4.1.2.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. L'application $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur $E$.

Ce lemme permet de voir tout espace préhilbertien comme un espace vectoriel normé, et donc comme un espace métrique. Toutes les notions topologiques ci-dessous seront prises relativement à cette structure.

**Lemme 4.1.3** (Égalités et inégalités classiques)**.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour $x, y \in E$, on a :

(1) (inégalité de Cauchy–Schwarz) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ;

(2) (théorème de Pythagore) si $\langle x, y \rangle = 0$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ;

(3) (égalité de la médiane) $\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

4.2. **Projection sur un convexe fermé.**

**Définition 4.2.1** (Espace de Hilbert)**.** Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet.

**Théorème 4.2.2** (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et soit $C \subset E$ une partie non vide convexe [1] et fermée.

(1) Pour tout $a \in E$ il existe un unique élément $p(a) \in C$ tel que $\|a - p(a)\| = d(a, C)$.

(2) Pour tout $u \in C$ on a $\mathrm{Re}(\langle a - p(a), u - p(a) \rangle) \leq 0$, et l'application $a \mapsto p(a)$ est 1-lipschitzienne.

*Référence* : [Po, Thm. 27.2.4] ou [Sk, Chap. 8, §2, Théorème de projection].

Si $F$ est une partie de $E$, on pose
$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

**Exercice 4.2.3.** Montrer que si $F \subset E$, $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E$, et qu'on a
$$F^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(F)}^{\perp}.$$

**Corollaire 4.2.4.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. On a $E = F \oplus F^{\perp}$.

*Référence* : [Po, Cor. 27.2.5] ou [Sk, Chap. 8, §2, Corollaire 1].

---

1. Rappelons qu'une partie $C$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ est dite convexe si pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$.

**Remarque 4.2.5.** Insistons sur le fait que cet énoncé n'est pas toujours vrai si on enlève une des hypothèses !

**Exemple 4.2.6.** (1) On note $\ell^2$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < \infty$. Alors $\ell^2$ a une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien défini par

$$\langle (x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}\rangle = \sum_{n\geq 0} \overline{x_n} \cdot y_n.$$

(2) Considérons un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, et l'espace $\mathrm{L}^2(X)$ associé, voir l'Exemple 3.2.2. Alors $\mathrm{L}^2(X)$ a une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_X \overline{f} g \mathrm{d}\mu.$$

(3) Soit $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des classes d'applications mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue) qui sont $2\pi$-périodiques (c'est-à-dire telles que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$) et qui vérifient

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty.$$

Alors le morphisme de restriction $\mathrm{L}^2_{2\pi} \to \mathrm{L}^2(]0, 2\pi[)$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ a une structure d'espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien défini par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t.$$

### 4.3. **Dualité et bases hilbertiennes.**

**Théorème 4.3.1** (Théorème de représentation de Riesz)**.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

(1) Pour tout $u \in E$, l'application

$$\begin{cases} E & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \langle u, x\rangle \end{cases}$$

est une forme linéaire continue sur $E$, de norme $\|u\|$.

(2) Réciproquement, soit $f : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $u \in E$ tel que $f(x) = \langle u, x\rangle$ pour tout $x \in E$.

*Référence* : [Po, Théorème 27.2.6] ou [Sk, Chap. 8, §2, Théorème de Riesz].

Dans l'énoncé suivant on utilise la notation introduite dans l'Exemple 3.3.6.

**Corollaire 4.3.2.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. L'application

$$E \to E'$$

envoyant un vecteur $u$ sur la forme linéaire $x \mapsto \langle u, x\rangle$ est un isomorphisme antilinéaire et isométrique. En particular, $E'$ a une structure naturelle d'espace de Hilbert.

**Définition 4.3.3** (Base hilbertienne)**.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que $(e_n)_{n\geq 0}$ est une *base hilbertienne* de $E$ si :

(1) pour tout $n \geq 0$ on a $\|e_n\| = 1$ ;
(2) pour tous $n, m \geq 0$ tels que $n \neq m$ on a $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ ;
(3) le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_n : n \geq 0)$ est dense dans $E$.

**Remarque 4.3.4.** (1) Attention ! Une base hilbertienne d'un espace préhilbertien n'est en général *pas* une base de cet espace au sens de l'algèbre linéaire ! (Pour certains détails sur ce sujet, voir l'Exercice 24(2).)

(2) On peut parfois vouloir considérer des bases hilbertiennes qui sont paramétrées par des ensembles différents de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, en particulier par des ensembles non dénombrable. C'est une théorie intéressante mais plus compliquée (cela nécessite notamment la notion de *famille sommable*) et pas au programme de l'agrégation. Nous n'en parlerons donc pas.

(3) Puisqu'on se restreint aux bases hilbertiennes paramétrées par $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (cf. remarque précédente), un espace préhilbertien (ou même un espace de Hilbert) n'admet pas nécessairement de base hilbertienne au sens ci-dessus. Mais c'est le cas pour de nombreux exemples intéressants.

**Proposition 4.3.5.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de $E$.

(1) Pour tout $x \in E$, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k$ converge vers $x$.
(2) (égalité de Parseval) Pour tout $x \in E$, on a
$$\|x\|^2 = \sum_{k \geq 0} |\langle e_k, x \rangle|^2.$$
(3) Pour tous $x, y \in E$, on a
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \geq 0} \overline{\langle e_k, x \rangle} \cdot \langle e_k, y \rangle.$$

*Référence* : [Po, §27.3] ou [G2, App. B, §1.4].

**Exemple 4.3.6** (Polynômes trigonométriques)**.** Pour tout $m \geq 0$ on note $e_{2m}$, resp. $e_{2m+1}$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $t \mapsto e^{imt}$, resp. $t \mapsto e^{i(-m-1)t}$. Alors la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2_{2\pi}$. (Voir la feuille sur les séries de Fourier.)

**Exemple 4.3.7** (Polynômes orthogonaux)**.** Dans cet exemple on travaille avec un espace de Hilbert *réel*. Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $\omega : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. L'espace vectoriel $E$ des fonctions continues de $I$ vers $\mathbb{R}$ telles que la fonction $t \mapsto f(t)^2 \omega(t)$ est intégrable sur $I$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire défini par
$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) g(t) \omega(t) \mathrm{d}t.$$
Si on suppose que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\int_I t^{2n} \omega(t) \mathrm{d}t < \infty,$$
alors toute fonction polynomiale sur $I$ appartient à $E$. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à la famille $(t \mapsto t^n : n \geq 0)$, on obtient une famille de *polynômes orthogonaux* dans $E$. Pour les propriétés classiques de ces familles, et des exemples, voir [Po, §28] ou [Sk, Chap. 8, §5].

## 5. Exercices

Les exercices suivants proposent soit des manipulations directes des définitions, pour permettre de voir si elles ont été bien comprises, soit des illustrations "classiques" de théorèmes qui fournissent des exemples à caser dans de nombreuses leçons (d'analyse comme d'algèbre), voire des développements.

### 5.1. **Topologie générale.**

**Exercice 1.** Si $(E, d)$ est un espace métrique et si $X \subset E$, montrer que $(E \overset{\circ}{\smallsetminus} X) = E \smallsetminus \overline{X}$.

**Exercice 2.** (1) Soit $(E, d)$ un espace métrique, et soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $E$. Montrer que si la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ a deux valeurs d'adhérence, alors elle ne converge pas.

(2) Montrer que si $(E, d)$ est compact, ces deux propriétés sont équivalentes.

*Référence* : [Qu, Chap. 3, Théorème I.2].

### 5.2. **Topologie de $\mathbb{R}$.**

**Exercice 3.** (1) Montrer qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

(2) En déduire que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

*Référence* : [Qu, Chap. 1, Ex. 1.14].

**Exercice 4.** Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe et dénombrable d'intervalles ouverts. (*Indication* : on pourra considérer la décomposition de l'ouvert en question en composantes connexes.)

### 5.3. **Espaces de fonctions.**

**Exercice 5.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère l'espace vectoriel normé des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathscr{C}$ le sous-ensemble des fonctions $f$ vérifiant $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que $\mathscr{C}$ est fermé, et que son intérieur est formé des fonctions $f$ qui vérifient $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

**Exercice 6** (Application de l'équivalence des normes en dimension finie)**.** On considère l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus $n$. Montrer que si $(P_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui converge simplement vers $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors la convergence est uniforme sur $[0, 1]$.

*Référence* : [Po, §18.4].

### 5.4. **Topologie des espaces de polynômes et de matrices.**

**Exercice 7** (Une application de la continuité des applications linéaires en dimension finie)**.** On fixe $n \geq 1$, et on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus $n$, qu'on munit d'une norme arbitraire, et on note $\Omega_n \subset \mathbb{R}_n[X]$ le sous-ensemble des polynômes ayant exactement $n$ racines distinctes.

(1) Montrer que $\Omega_n$ est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$. (*Indication* : étant donné un polynôme $P \in \Omega_n$, de racines $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, et des réels $\beta_0, \cdots, \beta_n$ tels que

$$\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n,$$

on pourra considérer l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $Q \mapsto (Q(\beta_0), \cdots, Q(\beta_n))$.)

(2) (a) Montrer que toute une suite réelle admet une sous-suite qui admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

(b) En déduire que l'adhérence de $\Omega_n$ est l'ensemble des polynômes nuls ou scindés dans $\mathbb{R}_n[X]$. (*Indication* : on pourra utiliser, pour $\beta \neq 0$, la formule $X - \beta = (-\beta)(1 - X/\beta)$.)

(3) *Application.* Notons $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonalisables. Montrer que l'intérieur de $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables avec $n$ valeurs propres distinctes, et que son adhérence est l'ensemble des matrices trigonalisables.

*Référence* : Pour (1) et (2), voir [FGN, Exercice *Adhérence de l'ensemble des polynômes simplement scindés dans* $\mathbb{R}_n[X]$]. Pour des versions de (3) dans le cadre complexe, voir les Exercices 8 et 9. Notons que pour l'application à la question (3), on peut remplacer le résultat de la question (2) par une version qui ne fait intervenir que des polynômes *unitaires*. Dans ce cas, on peut utiliser des arguments plus simples, soit basés sur la question (1) de l'Exercice 8, soit sur l'observation qu'un polynôme unitaire $P$ de degré $n$ à coefficients réels est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il vérifie $|\mathrm{Im}(z)|^n \leq P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. (Pour cela, voir [CP, Exercice 3.54].)

**Exercice 8** (Utilisation de la compacité)**.** (1) Soit

$$P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$$

un polynôme unitaire de degré $d$, à coefficients complexes. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $P$, alors

$$|z| \leq 1 + \max\{|a_i| : i \in \{0, \dots, d-1\}\}.$$

(2) Soit $E_d \subset \mathbb{C}[X]$ le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré $d$. Cet ensemble est naturellement en bijection avec $\mathbb{C}^d$, ce qui le munit d'une distance. Notons $U_d \subset E_d$ le sous-ensemble des polynômes ayant $d$ racines distinctes. Montrer que $U_d$ est ouvert dans $E_d$. (*Indication* : on pourra montrer que le complémentaire est fermé, en utilisant un argument de compacité.)

(3) En déduire que l'intérieur du sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices diagonalisables est formé des matrices ayant $n$ valeurs propres distinctes.

(4) (a) Montrer que si $(E, d)$ et $(E', d')$ sont des espaces métriques et $f : E \to E'$ est une application telle que l'image inverse de tout compact est compact, alors pour toute partie fermée $F \subset E$, $f(F)$ est fermé.

(b) En déduire que dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré au plus $n$, le sous-ensemble des polynômes unitaires dont toutes les racines sont réelles est fermé.

*Référence* : pour (1) et (4), voir [G2, Chap. I, §3.5, Ex. 1].

**Exercice 9.** (1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables (sur $\mathbb{C}$) est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

(3) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(M) = j\}$.

*Référence* : Pour (1), voir [G1, Chap. IV, §3.2, Proposition 2]. Pour (2), voir [G1, Chap. IV, §3.4, Ex. 1]. Pour (3), voir [G1, Chap. IV, §3.4, Ex. 3].

**Exercice 10.** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et notons $\mathcal{S}(M) = \{PMP^{-1} : P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ sa classe de conjugaison.

(1) Montrer que $M$ est nilpotente ssi $0 \in \overline{\mathcal{S}(M)}$.

(2) Montrer que $M$ est diagonalisable ssi $\mathcal{S}(M)$ est fermé.

*Référence* : Pour (1), voir [G1, Chap. IV, §3.4, Ex. 4]. Pour (2), voir [G1, Chap. IV, §3.4, Ex. 7].

**Exercice 11.** Le but de cet exercice est de montrer que les trois propriétés suivantes d'une matrice $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ sont équivalentes :

(i) $A$ est semblable à une matrice unitaire ;
(ii) $A$ est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont de module 1 ;
(iii) $|\det(A)| = 1$ et la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée [2].

On procède de la façon suivante.

(1) Montrer que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(2) Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(3) On suppose à partir de maintenant que (iii) est vérifiée. Montrer que toute valeur propre $\lambda$ de $A$ vérifie $|\lambda| = 1$. (On pourra d'abord montrer que si $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à une norme sur $\mathbb{C}^n$, on a $|\lambda| \leq \|A^n\|^{1/n}$ pour tout $n$.)

(4) D'après la décomposition de Dunford, il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, $D \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ diagonale inversible et $N \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ nilpotente telles que $ND = DN$ et $P^{-1}AP = D + N$. Montrer que la suite $\|(I + D^{-1}N)^n\|$ est bornée. (On pourra travailler avec la norme subordonnée à une norme sur $\mathbb{C}^n$.)

(5) En déduire que $N = 0$, et conclure.

*Référence* : [Qu, Chap. 3, Ex. 3.7].

5.5. **Connexité, connexité par arc.**

**Exercice 12.** (1) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes.

(2) (Variante) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ si $n \geq 2$.

*Référence* : Pour (1), voir [G2, Chap. 1, §4, Ex. 8]. Pour (2), voir [FGN, Exercice *Injection continue*].

**Exercice 13.** (1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

(2) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

(3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

*Indication* : on pourra utiliser les familles génératrices classiques de $\mathrm{GL}_n$ et $\mathrm{SL}_n$.

**Exercice 14.** Soit $X$ l'ensembles des projections linéaires de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes linéaires $f$ vérifiant $f \circ f = f$), qu'on munit de la distance induite par une norme sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

---

2. Remarquons que, par équivalence des normes en dimension finie, la propriété pour une suite de matrices de $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ d'être bornée ne dépend pas du choix de norme. En fait, une suite de matrices est bornée si et seulement si, pour tout indice $(i, j)$, la suite complexe obtenue en prenant le coefficient d'indice $(i, j)$ de chaque matrice est bornée.

(1) Montrer que la fonction $f \mapsto \mathrm{rg}(f)$ est continue sur $X$.

(2) Montrer que les composantes connexes de $X$ sont les $X_k := \{f \in X \mid \mathrm{rg}(f) = k\}$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, et que chacune de ces composantes est connexe par arcs.

*Référence* : [Qu, Chap. 4, Ex. 4.10].

**Exercice 15** (Une application du théorème de Riesz)**.** (1) Montrer que si $E$ est un espace vectoriel normé de dimension $\geq 2$ et si $r > 0$, alors $E \smallsetminus \mathrm{B_o}(0, r)$ est connexe par arcs. (*Indication* : étant donnés $x, y \in E$ non colinéaires, on pourra "dilater" le segment $[x, y]$.)

(2) On suppose maintenant que $E$ est de dimension infinie, et on considère un compact $K \subset E$. Le but de cette question est de montrer que $E \smallsetminus K$ est connexe par arcs.
   (a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $K \subset \mathrm{B_o}(0, r)$.
   (b) On fixe $x \in E \smallsetminus K$, et on suppose par l'absurde que pour tout vecteur $u \in E$ unitaire on a $K \cap (x + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot u) \neq \varnothing$. Montrer que l'application
$$f : K \to \mathrm{S}(0, 1)$$
   définie par $z \mapsto \frac{z-x}{\|z-x\|}$ est surjective.
   (c) En déduire que $\mathrm{S}(0, 1)$ est compact, puis une contradiction.
   (d) Montrer que tout point de $E \smallsetminus K$ peut être relié par un segment ne passant pas par $K$ à un vecteur de norme supérieure ou égale à $r$.
   (e) Conclure.

(3) Donner un contre-exemple à la question précédente dans le cas où $E$ est de dimension finie.

*Référence* : [FGN, Exercice *Complémentaire d'un compact*].

### 5.6. Compacité.

**Exercice 16** (Application de Borel–Lebesgue)**.** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact.

(1) Soit $I \subsetneq \mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ un idéal. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que pour tout $f \in I$ on a $f(x) = 0$. (*Indication* : on pourra raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Borel–Lebesgue.)

(2) En déduire une description des idéaux maximaux de l'anneau $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$.

*Référence* : [GT, Partie II, Chap. 4, 7] ou [G2, Chap. I, §3.5, Ex. 8].

**Exercice 17** (Théorème de d'Alembert en utilisant la compacité et la formule de Taylor)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert, qui affirme que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

On fixe $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

(1) Montrer que la fonction
$$\begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ z & \mapsto & |P(z)| \end{cases}$$
atteint son minimum.

(2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point en lequel ce minimum est atteint. Montrer que $P(z_0) = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde et écrire la formule de Taylor pour $P$ au point $z_0$.)

*Référence* : [G1, Chap. II, §5, Problème 4] ou [Po, §33.1.2(3)].

**Exercice 18** (Théorème de Dini, application de Borel–Lebesgue)**.** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $X$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue $f$. Supposons que pour tout $x \in X$ la suite de réels $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est croissante. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $f$ sur $X$. (*Indication* : pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pourra considérer les ensembles $F_n := \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$ et appliquer le théorème de Borel–Lebesgue.)

*Référence* : [Qu, Chap. 3, Théorème II.4].

**Exercice 19** (Application d'Ascoli)**.** Soit $A$ l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables et qui vérifient $|f(x)| \leq 1$ et $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que de toute suite de fonctions dans $A$ on peut extraire une sous-suite uniformément convergente (dont la limite sera donc continue).

*Référence* : [Di, Exemple 6.3.2].

**Exercice 20** (Application de Heine)**.** Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que si $a < b$ sont des réels, toute fonction continue $f : [a, b] \to E$ est limite uniforme de fonctions affines par morceaux. (En d'autres termes, le sous-espace vectoriel des fonctions affines par morceaux est dense dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{C}([a, b], E)$.)

*Référence* : [Po, §5.4.3].

5.7. **Complétude.**

**Exercice 21** (Théorème de Baire)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème de Baire*, qui affirme que si $(E, d)$ est un espace métrique complet et si $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ouverts denses, alors $\bigcap_{n\geq 0} \Omega_n$ est dense. (Notons que ce sous-ensemble n'est pas nécessairement ouvert. Dans la pratique, la propriété principale qu'on en déduit est qu'il est *non-vide*.)

Soit donc $(E, d)$ un espace métrique complet.

(1) Montrer que si $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fermés non vides de $E$ tels que $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout $n \geq 0$ et tels que
$$\operatorname{diam}(F_n) := \sup_{x,y\in F_n} d(x, y)$$
tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, alors $\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \varnothing$.

(2) Trouver un contre-exemple à la question précédente si on omet l'hypothèse que $\operatorname{diam}(F_n)$ tend vers 0.

(3) En déduire le théorème de Baire. (*Indication* : on pourra considérer un ouvert $U$ de $E$, puis construire une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $E$ et une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de réels strictement positifs tels que $r_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\mathrm{B_f}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathrm{B_f}(x_n, r_n)$ et $\mathrm{B_f}(x_n, r_n) \subset U \cap \Omega_0 \cap \cdots \cap \Omega_n$.)

(4) Montrer que si $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fermés de $E$ d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ est d'intérieur vide.

*Référence* : [Qu, Chap. 5, Théorème III.1] ou [FGN, Exercice *Le théorème de Baire*].

**Exercice 22** (Application de Baire)**.** Soit $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(nx)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. (*Indication* : pour $\varepsilon > 0$, on pourra considérer

$$F_{\varepsilon,N} := \{x \geq 1 \mid \forall n \geq N, |f(nx)| \leq \varepsilon\},$$

puis appliquer le théorème de Baire.)

*Référence* : [Qu, Chap. 5, Ex. 5.24] ou [FGN, Exercice *Le lemme de Croft*].

**Exercice 23** (Une autre application de Baire)**.**

(1) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications continues d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ (avec $a < b$), qui converge simplement vers une application $f$. Montrer que $f$ a un ensemble dense de points de continuité. (*Indication* : en appliquant le théorème de Baire, on montrera que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$F_{N,\varepsilon} := \{x \in [a, b] \mid \forall n, p \geq N, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}$$

est d'intérieur non vide. Puis on construira un point de continuité de $f$, et on en déduira le résultat.)

(2) Application : montrer que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$, alors il existe un ensemble dense de points en lesquels $f$ est différentiable.

*Référence* : [Qu, Chap. 5, Théorème III.6] pour (1) et [Qu, Chap. 5, Ex. 5.16] pour (2).

**Exercice 24** (Encore des applications du théorème de Baire)**.**

(1) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, soit $p < n$, et soit $(F_k)_{k \geq 0}$ une suite de sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension $p$.
   (a) Montrer que $\bigcup_{k \geq 0} F_k \neq E$.
   (b) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ tel que $E = F_k \oplus G$ pour tout $k \geq 0$. (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur $n - p$.)

(2) Montrer qu'un espace vectoriel normé admettant une base (au sens algébrique) dénombrable (non finie) n'est pas complet.

*Référence* : Pour (1), voir [FGN, Exercice *Supplémentaire commun*]. Pour (2), voir [FGN, Commentaires après l'exercice *Le théorème de Baire*] ou [G2, App. A, Ex. 1].

### 5.8. **Espaces de Hilbert.**

**Exercice 25** (Théorème de Lax–Milgram)**.** Le but de cet exercice est de démontrer une version du théorème de Lax–Milgram, qui affirme que si $H$ est un espace de Hilbert et $T : H \to H$ est une application linéaire continue telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\langle T(u), u\rangle| \geq \alpha \|u\|^2$$

pour tout $u \in H$, alors $T$ est bijective, $T^{-1}$ est continue, et $\|T^{-1}\| \leq 1/\alpha$.

On fixe donc $H$, $T$ et $\alpha$ comme dans cet énoncé.

(1) Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$.
(2) En déduire que $T$ est injective, et que son image est fermée.
(3) Montrer que $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = 0$, et en déduire que $T$ est surjective.
(4) Montrer que $T^{-1}$ est continue avec $\|T^{-1}\| \leq 1/\alpha$.

*Référence* : [Sk, §8.4, p. 265] ou [QZ, Chap. VI, Exemple II.14].

**Exercice 26** (Application de Lax–Milgram)**.** Cet exercice utilise l'Exercice 25. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert (complexe), et $T : E \to E$ une application linéaire continue.

(1) Montrer que si $\|T\| < 1$ alors l'opérateur $\mathrm{id} - T$ est bijectif. (On pourra donner deux démonstration : une utilisant Lax–Milgram, l'autre utilisant un argument de série entière.)
(2) Montrer que si $T$ est unitaire, alors pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \neq 1$, $T - a\mathrm{id}$ est bijectif.
(3) Montrer que si $T^* = -T$ alors pour tout $a \in \mathbb{C}$ de partie réelle non nulle, $T - a\mathrm{id}$ est bijectif.
(4) Montrer que si $T$ est autoadjoint, alors pour tout $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ l'opérateur $T - a\mathrm{id}$ est bijectif.
(5) Montrer que si $T$ est positif (c'est-à-dire autoadjoint et tel que $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x$), alors pour tout $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+$ l'opérateur $T - a\mathrm{id}$ est bijectif.

*Référence* : [Sk, p. 266].

**Exercice 27** (Compacité faible de la boule unité – Application du théorème de représentation de Riesz)**.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert (complexe). Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de vecteurs de $E$ et si $x \in E$, on dit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ *converge faiblement vers* $x$ si pour tout $v \in E$ on a

$$\langle x_n, v\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, v\rangle.$$

Le but de cet exercice est de montrer que de toute suite bornée de vecteurs de $E$ on peut extraire une suite qui converge faiblement. On fixe donc une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de $E$ qui est bornée.

(1) Montrer que pour tout $v \in E$ il existe une sous-suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que la suite $(\langle y_n, v\rangle)_{n\geq 0}$ converge.
(2) Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$ la suite $(\langle y_n, x_k\rangle)_{n\geq 0}$ converge. (*Indication* : on pourra utiliser un procédé d'extraction diagonale.)
(3) On pose $F = \overline{\mathrm{Vect}(x_k : k \geq 0)}$. Montrer que pour tout $v \in F$ la suite $(\langle y_n, v\rangle)_{n\geq 0}$ converge. (*Indication* : on pourra utiliser le critère de Cauchy.)
(4) Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que pour tout $v \in F$ on a
$$\langle y_n, v\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, v\rangle.$$
(*Indication* : on pourra considérer l'application envoyant $v$ sur la limite de la suite $(\langle y_n, v\rangle)_{n\geq 0}$, puis appliquer le théorème de représentation de Riesz.)
(5) Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers $x$. (*Indication* : on pourra utiliser le fait que $E = F \oplus F^{\perp}$.)

*Référence* : [G2, App. B, §2, Ex. 1].

### 5.9. **Autre exercice.**

**Exercice 28** (Application de Riesz et Ascoli)**.** Cet exercice propose une application des théorèmes de Riesz et Ascoli (et du théorème de l'isomorphisme de Banach).

(1) Montrer que si $E, F$ sont des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ est une application linéaire continue, alors son graphe $\Gamma(f) = \{(x, f(x) : x \in E\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$.

(2) Démontrer le *théorème du graphe fermé* : si $E, F$ sont des espaces vectoriels normés complets et $f : E \to F$ est une application linéaire telle que $\Gamma(f)$ est fermé, alors $f$ est continue. (On pourra utiliser le *théorème de l'isomorphisme de Banach*, qui affirme que si $g : V_1 \to V_2$ est une application linéaire bijective entre espaces vectoriels normés complets, alors $g^{-1} : V_2 \to V_1$ est continue.)

(3) Montrer que l'espace $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet pour la norme $\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

(4) Soit $V \subset \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel fermé, qui ne contient que des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in V$ on a $\|f'\| \leq C\|f\|$.

   (b) En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que la boule unité de $V$ est compacte.

   (c) En déduire que $V$ est de dimension finie.

*Référence* : [GT, Partie III, Chap. 4, 10]. Pour le théorème du graphe fermé, on pourra consulter aussi [Qu, Chap. 5, Théorème III.12].

## Références


[BP] M. Briane, G. Pagès, *Analyse. Théorie de l'intégration*, 7ème édition, De Boeck, 2018.

[CP] P. Caldeo, M. Peronnier, *Carnet de voyage en Algébrie, nouvelle édition revue et enrichie*, Calvage et Mounet, 2022.

[Di] J. Dixmier, *Topologie générale*, P.U.F., 1981. (Hors bibliothèque du concours !)

[FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques - oraux X-ENS - analyse 3*, Cassini, 2014.

[GT] S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation - Topologie et analyse fonctionelle*, Ellipses, 1996.

[G1] X. Gourdon, *Les maths en tête - Algèbre*, Ellipses, 1994.

[G2] X. Gourdon, *Les maths en tête - Analyse, 2ème édition*, Ellipses, 2008.

[No] I. Nourdin, *Agrégation de mathématiques, épreuve orale*, Dunod.

[Po] A. Pommellet, *Agrégation de Mathématiques - Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.

[Qu] H. Queffélec, *Topologie*, Dunod, 2012.

[QZ] H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation, 3ème édition*, Dunod, 2007.

[Sk] G. Skandalis, *Mathématiques pour la licence - Topologie et analyse*, Dunod, 2001.