# PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : RAPPELS SUR LES SÉRIES DE FOURIER

SIMON RICHE

Sauf mention du contraire, le contenu de cette fiche est tiré de [QZ, Chap. IV]. Une autre référence conseillée pour ces notions est le livre [EA]. (Notons cependant que ce livre ne fait pas partie de la bibliothèque fournie par le jury pour les oraux !)

## 1. Quelques extraits des documents officiels

### 1.1. Programme concernant les séries de Fourier (session 2025).

Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann–Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejér et de Parseval.

### 1.2. Commentaires du jury sur la leçon 246 – Séries de Fourier. Exemples et applications (rapport 2023).

Dans cette leçon, la théorie $L^2$ est incontournable, et son interprétation en terme d'isométrie doit être mise en évidence. Les candidats doivent pouvoir écrire l'identité de Parseval pour exprimer le produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbf{T})$.

En ce qui concerne la convergence simple, ou uniforme ou en norme $L^p$ au sens de Cesàro, les propriétés cruciales des noyaux utilisés devront être clairement explicitées.

Un autre thème important est le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier.

Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier : calculs de sommes de séries, équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, inégalité isopérimétrique, etc.

Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, la convergence de la série de Fourier d'une fonction $\alpha$-höldérienne si $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

## 2. Préliminaires

### 2.1. Espaces $\mathrm{L}^p$.

*Date*: Année 2024-25.

2.1.1. *Définition (cas $p < \infty$).* Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $p \geq 1$, on note $\mathscr{L}^p(X)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables et telles que

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Pour $f \in \mathscr{L}^p(X)$ on note

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

On définit ensuite $\mathrm{L}^p(X)$ comme le quotient de $\mathscr{L}^p(X)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout ; la structure d'espace vectoriel sur $\mathscr{L}^p(X)$ induit une structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{L}^p(X)$, et l'application $f \mapsto \|f\|_p$ induit une fonction (notée de la même façon) de $\mathrm{L}^p(X)$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, qui est une norme, et munit donc $\mathrm{L}^p(X)$ d'une structure d'espace vectoriel normé. (Pour les détails, voir [BP, §9.3].) Le *Théorème de Riesz–Fischer* (voir [BP, Théorème 9.3]) affirme que cet espace vectoriel normé est complet (c'est-à-dire un espace de Banach).

**Proposition 1** (Inégalité de Hölder)**.** Supposons que $\mu$ est une mesure de probabilité. Si $p < q$ alors $\mathscr{L}^q(X) \subset \mathscr{L}^p(X)$, et pour tout $f \in \mathscr{L}^q(X)$ on a

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q.$$

En particulier, l'inclusion $\mathscr{L}^q(X) \subset \mathscr{L}^p(X)$ induit une application injective

$$\mathrm{L}^q(X) \to \mathrm{L}^p(X)$$

après passage au quotient.

*Référence* : voir [BP, Proposition 9.2 et Corollaire 9.2].

Dans le cas $p = 2$, l'espace $\mathrm{L}^2(X)$ est un espace de Hilbert (complexe) pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f} g \mathrm{d}\mu.$$

Voir [BP, §9.6].

2.1.2. *Densité des fonctions continues à support compact.* Pour le prochain énoncé, on suppose que $X$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Notons $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ continues à support compact. Notons qu'une telle fonction est toujours mesurable et intégrable, et que deux fonctions continues qui coïncident presque partout sont égales. [1] On a donc une inclusion $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X) \subset \mathscr{L}^p(X)$, et la composée

$$\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X) \hookrightarrow \mathscr{L}^p(X) \twoheadrightarrow \mathrm{L}^p(X)$$

est injective. On peut donc considérer $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X)$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^p(X)$.

**Proposition 2** (Densité des fonctions à support compact)**.** Si $X$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue), alors le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(X) \subset \mathrm{L}^p(X)$ est dense.

1. Plus généralement, ceci reste vrai pour un espace métrique $X$ muni d'une mesure sur la tribu borélienne dont le support est $X$.

*Référence* : ce résultat est démontré dans [BP, Théorème 9.4] dans le cas $X = \mathbb{R}$. Le cas d'un intervalle ouvert peut s'y ramener car cet intervalle est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Pour une version plus générale de cette proposition, qui couvre le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (pour la mesure de Lebesgue), voir [Ru, Théorème 3.14].

2.1.3. *Définition (cas $p = \infty$).* Revenons au cadre d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ général. Pour $p = +\infty$, on note $\mathscr{L}^\infty(X)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ qui sont mesurables et essentiellement bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\{x \in X \mid |f(x)| > M\}$ est de mesure nulle. Si $f$ est une telle fonction, on note $\|f\|_\infty$ le plus petit réel $M$ vérifiant cette condition. [2] On définit alors $\mathrm{L}^\infty(X)$ comme le quotient de $\mathscr{L}^\infty(X)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout. La structure d'espace vectoriel sur $\mathscr{L}^\infty(X)$ induit une structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{L}^\infty(X)$, et l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ induit une fonction (notée de la même façon) de $\mathrm{L}^\infty(X)$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, qui est une norme, et munit donc $\mathrm{L}^\infty(X)$ d'une structure d'espace vectoriel normé. Encore une fois, cet espace est complet, c'est-à-dire un espace de Banach. Pour tout cela, voir [BP, §9.5].

2.2. **Théorème de Fubini.** Rappelons qu'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dit *$\sigma$-fini* s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de parties mesurables de $X$, telles que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n$, et $X = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. Étant donnés deux espaces mesurés $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, la tribu produit $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ est la tribu engendrée par les parties $A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Si $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ sont supposés $\sigma$-finis, alors il existe une unique mesure $\nu$ sur $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ telle que $\nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ si $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$ (voir [BP, Théorème 11.1]). Cette mesure est $\sigma$-finie ; elle est appelée *mesure produit* de $\mu_1$ et $\mu_2$, et notée $\mu_1 \times \mu_2$.

**Théorème 1** (Théorème de Fubini)**.** Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés $\sigma$-finis. Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. [3] Alors :

(1) Pour presque tout $x \in X_1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est une fonction intégrable sur $X_2$, et la fonction $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y)\mathrm{d}\mu_2(y)$ est une fonction intégrable sur $X_1$.

(2) Pour presque tout $y \in X_2$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est une fonction intégrable sur $X_1$, et la fonction $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y)\mathrm{d}\mu_1(x)$ est une fonction intégrable sur $X_2$.

(3) On a

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2} f(x, y)\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x, y)\mathrm{d}\mu_2(y) \right) \mathrm{d}\mu_1(x) \\ &= \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x, y)\mathrm{d}\mu_1(x) \right) \mathrm{d}\mu_2(y).\end{aligned}$$

*Référence* : [BP, Théorème 11.3].

**Remarque 1.** Pour vérifier l'hypothèse d'intégrabilité sur $f$, on peut utiliser le *théorème de Fubini–Tonelli*, dont l'énoncé est le même que ci-dessus mais pour une fonction $f$ à valeurs *réelles positives* (de sorte que toutes les intégrales considérées existent, même si elles peuvent valoir $+\infty$), en supposant simplement que $f$ est mesurable, voir [BP, Théorème 11.2].

2. Cette phrase sous-entend que l'ensemble des réels $M$ ci-dessous admet un minimum, ce qui n'est pas complètement évident mais découle des propriétés standard des mesures.

3. Rappelons qu'une fonction est intégrable si l'intégrale de son *module* est finie.

2.3. **Remarques sur la notation $\Sigma$.** La théorie des séries de Fourier conduit naturellement à considérer des sommes infinies indexées par $\mathbb{Z}$, alors que les sommes rencontrées habituellement dans l'étude des séries de fonctions sont indexées par $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (ou $\mathbb{Z}_{\geq 1}$, ou des variantes similaires). Ce remplacement n'est pas anodin, puisque $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ admet (pour l'ordre naturel) un plus petit élément, alors que $\mathbb{Z}$ n'en possède pas. Ce que l'on note

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_n$$

désigne toujours, sans ambiguïté,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(quand cette limite existe). Attention ! Notons au passage que l'existence de cette limite ne garantit pas la convergence d'une suite de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}$ où $\varphi : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ est une bijection, ni (s'il y a convergence) que la limite est indépendante de $\varphi$.

La signification de la notation

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$$

est plus problématique. Dans le contexte des séries de Fourier, elle désigne

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k. \tag{1}$$

Attention ! Dire que cette somme est bien définie, c'est-à-dire que la limite (1) existe, n'implique pas nécessairement que d'autres sommes infinies naturelles (par exemple $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_n$) sont bien définies. (Penser au cas $a_n = n$ par exemple.)

La "bonne" notion pour traiter ces questions est celle de "famille sommable." Cette notion ne fait pas officiellement partie du programme, mais elle peut être considérée comme à sa frontière. Il peut donc être bien de retenir que cela existe, et d'avoir une petite idée des grandes lignes de la théorie. Pour cela, on pourra consulter la fiche `https://w3.ens-rennes.fr/math/people/karine.beauchard/Familles_sommables.pdf` ou [Sk, Chap. 7, §4].

## 3. Définitions et premières propriétés

3.1. **Espaces de fonctions périodiques.** La théorie des séries de Fourier s'applique à des fonctions ($2\pi$-)périodiques. Avant de commencer cette théorie, il faut préciser ce que cela signifie.

3.1.1. *Cas des fonctions continues.* Pour les fonctions continues, il n'y a aucune subtilité. On notera $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont $2\pi$-périodiques (c'est-à-dire telles que $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et continues. Cet espace est muni d'une norme naturelle, définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

3.1.2. *Espaces* $\mathrm{L}^p$ *(cas $p<\infty$).* Pour les fonctions mesurables, il faut faire plus attention. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction mesurable, on dira qu'elle est $2\pi$-périodiques si elle vérifie $f(x+2\pi)=f(x)$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}$. (Si $f$ est continue, cette condition est équivalente à celle considérée précédemment.) Pour tout $p\in[1,+\infty[$, on notera $\mathscr{L}^p_{2\pi}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ qui sont $2\pi$-périodiques, Lebesgue-mesurables et telles que

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\mathrm{d}t<+\infty.$$

Si $f$ est une telle fonction, on notera

$$\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

On définit ensuite $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ comme le quotient de $\mathscr{L}^p_{2\pi}$ par la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout ; cet espace a une structure naturelle d'espace vectoriel, et la fonction $\|\cdot\|_p$ induit une application de $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Considérons l'espace mesuré $]0,2\pi[$, avec la mesure de Lebesgue multipliée par $\frac{1}{2\pi}$ (pour en faire un espace de probabilité). L'application linéaire

$$\mathscr{L}^p_{2\pi}\to\mathscr{L}^p(]0,2\pi[)$$

définie par la restriction induit un isomorphisme

$$\mathrm{L}^p_{2\pi}\xrightarrow{\sim}\mathrm{L}^p(]0,2\pi[);$$

il s'ensuit que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathrm{L}^p_{2\pi}$, qui en fait un espace de Banach.

L'inégalité de Hölder (Proposition 1) implique que si $p<q$ alors on a une inclusion naturelle $\mathrm{L}^q_{2\pi}\subset\mathrm{L}^p_{2\pi}$ et

$$\|f\|_p\leq\|f\|_q \tag{2}$$

pour tout $f\in\mathrm{L}^q_{2\pi}$. Dans le cas $p=2$, l'espace $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ est un espace de Hilbert complexe, pour le produit scalaire hermitien défini par

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t.$$

On a bien sûr $\mathscr{C}_{2\pi}\subset\mathscr{L}^p_{2\pi}$, qui induit une inclusion $\mathscr{C}_{2\pi}\subset\mathrm{L}^p_{2\pi}$.

**Proposition 3.** Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}_{2\pi}\subset\mathrm{L}^p_{2\pi}$ est dense.

*Démonstration.* Soit $f\in\mathscr{L}^p_{2\pi}$, et soit $\varepsilon>0$. Notons $\tilde{f}$ l'image de $f$ dans $\mathscr{L}^p(]0,2\pi[)$. D'après la Proposition 2, il existe une fonction $\tilde{g}$ continue à support compact sur $]0,2\pi[$ telle que $\|\tilde{f}-\tilde{g}\|_p<\varepsilon$. Comme $\tilde{g}$ est à support compact, il existe $\eta>0$ tel que $\tilde{g}$ s'annule sur $]0,\eta[$ et sur $]2\pi-\eta,2\pi[$ ; elle se prolonge donc naturellement en une fonction $g$ continue et $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. On a alors $\|f-g\|_p<\varepsilon$, ce qui démontre le résultat voulu. □

3.1.3. *Espaces* $\mathrm{L}^p$ *(cas $p=\infty$).* Pour $p=\infty$, on notera $\mathscr{L}^\infty_{2\pi}$ le sous-espace de $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ constitué des fonctions $2\pi$-périodiques, et $\mathrm{L}^\infty_{2\pi}$ le quotient de $\mathscr{L}^\infty_{2\pi}$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout. Alors $\mathrm{L}^\infty_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, et donc $\mathrm{L}^\infty_{2\pi}$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il est contenu dans chacun des espaces $\mathrm{L}^p_{2\pi}$.

**Remarque 2.** (1) Toute la théorie des séries de Fourier peut se généraliser au cas où la période $2\pi$ est remplacée par un réel $a > 0$ quelconque : pour cela on passe d'une fonction $2\pi$-périodique $f$ à une fonction $a$-périodique en posant $f_a(t) = f(\frac{2\pi}{a}t)$. Un cas utilisé fréquemment est celui où $a = 1$. (Cela permet notamment de faire disparaître les facteurs impliquant $1/2\pi$ dans de nombreuses formules, au prix de l'ajout d'un facteur $2\pi$ dans les fonctions $e_n$ ci-dessous.)

(2) On expose ici la théorie des séries de Fourier pour les fonctions à valeurs complexes. Pour des fonctions à valeurs réelles, pour rester dans le monde des nombres réels il peut être plus naturel de considérer des intégrales faisant intervenir les fonctions cos et sin plutôt que $t \mapsto e^{it}$, ce qui conduit à des constructions légèrement différentes. Cette variante est survolée dans l'Exercice 3.

3.2. **Coefficients de Fourier.** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on notera $e_n$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $t \mapsto e^{int}$.

Si $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e_{-n}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

(Cette intégrale est bien définie puisque la fonction $t \mapsto f(t)e^{-int}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.) Ce nombre complexe est appelé le *$n$-ème coefficient de Fourier* de $f$. Notons que pour tout $g \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ et tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} g(t)\mathrm{d}t; \tag{3}$$

en particulier pour tout $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t \tag{4}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. Notons également que

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_1 \tag{5}$$

pour tout $n$ ; en particulier, la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. (On va dire mieux plus tard ; voir la Proposition 5.)

**Lemme 1.** Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(e_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* On a

$$c_n(e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\mathrm{d}t.$$

Si $n = m$, l'intégrale vaut $2\pi$, et donc $c_n(e_m) = 1$. Si $n \neq m$ on a

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i(m-n)}e^{i(m-n)t}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

Pour $n \geq 0$, on posera également

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$$

($n$-ème somme partielle de Fourier) et

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f).$$

On rappelle qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* (resp. *continue par morceaux*) s'il existe $a_0, \ldots, a_m$ tels que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b$$

et que pour tout $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, la restriction $f_{|]a_j, a_{j+1}[}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. continue) sur $[a_j, a_{j+1}]$. Si $f$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on notera $Df$ toute fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Df_{|]a_j,a_{j+1}[}$ est la fonction dérivée de $f_{|]a_j,a_{j+1}[}$ pour tout $j$. (La classe de cette fonction modulo la relation d'égalité presque partout est bien définie.) On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si sa restriction à chaque segment l'est, et on définit alors $Df$ de manière évidente.

**Proposition 4.** Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux[4]. Alors la fonction $Df$ est dans $\mathrm{L}^1_{2\pi}$, et on a

$$c_n(Df) = in \cdot c_n(f).$$

En particulier, $c_n(f) = \mathrm{O}(1/n)$ en $\pm\infty$.

*Démonstration.* La fonction $Df$ est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, donc bornée, donc dans $\mathrm{L}^1_{2\pi}$. Fixons maintenant $a_0, \ldots, a_m$ comme dans la Note 4. Pour tout $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, la formule d'intégration par parties montre que

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} (Df)(t) e^{-int} \mathrm{d}t = f(a_{j+1}) e^{-ina_{j+1}} - f(a_j) e^{-ina_j} + in \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t.$$

En sommant ces égalités puis en divisant par $2\pi$ on trouve que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Df)(t) e^{-int} \mathrm{d}t = \big(f(2\pi) - f(0)\big) + in \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire que $c_n(Df) = in \cdot c_n(f)$. Puisque la famille $(c_n(Df))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée (voir (5)), on en déduit que $c_n(f) = \mathrm{O}(1/n)$ en $\pm\infty$. $\square$

3.3. **Le lemme de Riemann-Lebesgue.** Le "lemme de Riemann–Lebesgue" est l'énoncé suivant.

**Proposition 5** (Lemme de Riemann–Lebesgue)**.** Pour tout $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, on a

$$c_n(f) \xrightarrow[|n| \to +\infty]{} 0.$$

---

4. Puisque $f$ est supposée continue et $2\pi$-périodique, cela revient à dire qu'il existe $a_0, \ldots, a_m$ tels que $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 2\pi$, $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi] \smallsetminus \{a_0, \ldots, a_m\}$, et qu'elle admet des dérivées à gauche et à droite en chacun des $a_i$.

Pour démontrer la proposition on va utiliser deux lemmes préliminaires. Fixons tout d'abord $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit $\tau_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en posant

$$(\tau_a f)(x) = f(x+a).$$

**Lemme 2.** Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\tau_a f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, et

$$c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

*Démonstration.* Les deux propriétés voulues s'obtiennent en faisant le changement de variable $y = x + a$ et en utilisant (4). □

On a donc une application linéaire $\tau_a : \mathrm{L}^1_{2\pi} \to \mathrm{L}^1_{2\pi}$ qui est un automorphisme d'inverse $\tau_{-a}$. Il est facile de voir que $\tau_a$ est une isométrie, et que pour tout $p \in [1, +\infty]$ elle se restreint en un automorphisme du sous-espace $\mathrm{L}^p_{2\pi}$, qui est de plus une isométrie pour la norme $\| \cdot \|_p$. Dans l'énoncé suivant, en vue d'autres applications futures, on considère des espaces $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, même si seul le cas $p = 1$ va être utilisé immédiatement.

**Lemme 3.** Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ et pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels tendant vers 0, la suite $(\tau_{a_n} f)_{n\geq 0}$ tend vers $f$ dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$.

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que $f$ est continue, et soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\|\tau_{a_n} f - f\|_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a_n + x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Puisque $f$ est continue sur le compact $[-\pi, 3\pi]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine ; pour $n$ assez grand on a donc $|f(a_n + x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. La formule ci-dessus montre alors que $\|\tau_{a_n} f - f\|_p < \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

Considérons maintenant le cas général, et fixons encore $\varepsilon > 0$. Puisque les fonctions continues sont denses dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ (voir la Proposition 3), il existe $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ telle que $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Par inégalité triangulaire on a alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\|\tau_{a_n} f - f\|_p \leq \|\tau_{a_n} f - \tau_{a_n} g\|_p + \|\tau_{a_n} g - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{2\varepsilon}{3} + \|\tau_{a_n} g - g\|_p$$

puisque $\|\tau_{a_n} f - \tau_{a_n} g\|_p = \|\tau_{a_n}(f - g)\|_p = \|f - g\|_p$. D'après le cas continu traité ci-dessus, pour $n$ assez grand on a $\|\tau_{a_n} g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, et donc $\|\tau_{a_n} f - f\|_p < \varepsilon$, comme souhaité. □

**Remarque 3.** En utilisant le fait que $\tau_{a+a'} f = \tau_a(\tau_{a'} f)$ pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$, le Lemme 3 peut s'interpréter en disant que pour $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$ fixé, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{L}^p_{2\pi}$ envoyant $a$ sur $\tau_a f$ est continue.

On peut maintenant démontrer le lemme de Riemann–Lebesgue.

*Preuve de la Proposition 5.* D'après le Lemme 2 et puisque $e^{i\pi} = -1$, pour tout $n \geq 1$ on a $c_n(\tau_{\frac{\pi}{n}} f) = -c_n(f)$, et donc

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\big(c_n(f) - c_n(\tau_{\frac{\pi}{n}} f)\big).$$

D'après (5) ceci implique que

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \|f - \tau_{\frac{\pi}{n}} f\|_1.$$

Le résultat est alors clair d'après le Lemme 3 (appliqué à $p = 1$). □

**Remarque 4.** Le lemme de Riemann–Lebesgue montre que l'application linéaire envoyant $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ vers la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ prend ses valeurs dans les suites qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. On peut se poser la question de la surjectivité de cette application, c'est-à-dire si toute suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$ et tendant vers 0 en $\pm\infty$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction dans $\mathrm{L}^1_{2\pi}$. Une application classique du théorème de l'application ouverte montre qu'en fait ce n'est *pas* le cas. Pour les détails, voir la feuille sur la leçon 208. (Cette preuve utilise l'injectivité de cette application, qui est démontrée au Corollaire 3 ci-dessous.)

3.4. **Coefficients de Fourier d'une convolée.** Rappelons la définition de la convolution de fonctions. Étant données $f, g \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, par le théorème de Fubini–Tonelli (voir la Remarque 1) on a

$$\int_{[0,2\pi]^2} |f(x-t)g(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} |g(t)| \left( \int_0^{2\pi} |f(x-t)|\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} |g(t)| \left( \int_{-t}^{2\pi-t} |f(y)|\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{2\pi} |g(t)| \cdot \|f\|_1 \mathrm{d}t = (2\pi)^2 \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

(où on a utilisé l'égalité (3) pour la troisième égalité.) La fonction $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est donc intégrable sur $[0,2\pi]^2$ ; le théorème de Fubini (Théorème 1) assure alors que pour presque tout $x \in [0,2\pi]$ la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $[0,2\pi]$, ce qui permet de définir la fonction $f \star g$ sur $[0,2\pi]$ (presque partout) en posant

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Le théorème de Fubini assure également que $f \star g$ est intégrable sur $[0,2\pi]$. On peut prolonger cette fonction à $\mathbb{R}$ par $2\pi$-périodicité ; en fait, la formule ci-dessus reste valable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $u = x - t$ on voit que

$$f \star g = g \star f.$$

(En d'autres terms la convolution est une opération commutative. On voit également facilement qu'elle est associative.)

**Proposition 6.** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f \star g) = c_n(f) \cdot c_n(g).$$

*Démonstration.* On va encore une fois appliquer le théorème de Fubini. Par définition on a

$$c_n(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t \right) e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

Le calcul ci-dessus montre que la fonction $(t,x) \mapsto f(x-t)g(t)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0,2\pi]^2$ ; on peut donc bien appliquer le théorème de Fubini, qui implique que

$$c_n(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-inx}\mathrm{d}x \right) g(t)\mathrm{d}t.$$

En utilisant le Lemme 2, on obtient donc que

$$c_n(f \star g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} c_n(\tau_{-t} f) g(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_n(f) g(t) e^{-int} \mathrm{d}t$$
$$= c_n(f) \cdot c_n(g),$$

ce qui conclut la preuve. □

On aura besoin également plus loin du résultat suivant.

**Lemme 4.** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, et soit $g \in \mathrm{L}^\infty_{2\pi}$. Alors $f \star g$ appartient à $\mathrm{L}^\infty_{2\pi}$, et on a

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

*Démonstration.* Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|(f \star g)(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t) g(t)| \mathrm{d}t$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty \int_0^{2\pi} |f(x-t)| \mathrm{d}t = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty,$$

ce qui montre l'inégalité voulue. □

## 4. Le théorème de Fejér

4.1. **Énoncé.** Le théorème de Fejér est l'énoncé de convergence le plus général concernant les séries de Fourier. Il ne concerne pas les sommes partielles de Fourier $S_n(f)$, mais plutôt les "sommes de Cesàro" $\sigma_n(f)$.

**Théorème 2** (Théorème de Fejér)**.** (1) Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, et

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

(2) Soit $p \in [1, +\infty[$, et soit $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$, et

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

4.2. **Étude du noyau de Fejér.** Fixons $n \geq 1$. Le "noyau de Fejér" d'ordre $n$ est la fonction

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=-k}^{k} e_j \right).$$

La preuve ci-dessous utilisera les propriétés suivantes de cette fonction.

**Lemme 5.** (1) Pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

(2) On a $\|K_n\|_1 = c_0(K_n) = 1$.

*Démonstration.* (1) Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a

$$nK_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-k}^{k} e_j(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx} \left( \sum_{j=0}^{2k} e^{ijx} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ikx} \cdot \frac{e^{i(2k+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((k+1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$

On en déduit que $\sin(x/2) \cdot nK_n(x)$ est la partie imaginaire de

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1/2)x} = e^{ix/2} \cdot \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{inx/2} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)},$$

et donc finalement que

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

comme désiré.

(2) D'après (1) la fonction $K_n$ est à valeurs réelles positives ; on a donc $\|K_n\|_1 = c_0(K_n)$. Le résultat annoncé suit, en utilisant le Lemme 1 et la définition de $K_n$. □

4.3. **Démonstration du théorème de Fejér.** On peut maintenant démontrer le Théorème de Fejér.

*Preuve du Théorème 2.* Le point clé de la preuve est de remarquer que si $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$(e_n \star f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(x-t)} f(t) \mathrm{d}t = e_n(x) \cdot c_n(f), \tag{6}$$

de sorte que

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=-k}^{k} c_k(f) e_k = K_n \star f.$$

(1) On suppose maintenant que $f$ est continue. Alors $f$ est bornée, et d'après le Lemme 4 et le Lemme 5(2) on a

$$\|\sigma_n(f)\|_\infty = \|K_n \star f\|_\infty \leq \|K_n\|_1 \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

En utilisant encore une fois le Lemme 5(2), on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) - \sigma_n(f)(x) = f(x) c_0(K_n) - \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t) \mathrm{d}t.$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est continue sur le compact $[-\pi, 3\pi]$, elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ (qu'on supposera de plus inférieur à $\pi$) tel que pour tous $y, y' \in [-\pi, 3\pi]$ on a

$$|y - y'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(y')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) \mathrm{d}t$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| K_n(t) \mathrm{d}t,$$

et donc

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) \mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) \mathrm{d}t \right) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) \mathrm{d}t.$$

Ici on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) \mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|K_n\|_1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, si $t \in [-\pi, \pi] \smallsetminus [-\delta, \delta]$ on a $|\sin(t/2)| \geq \sin(\delta/2)$, si bien que d'après le Lemme 5(1) on $|K_n(t)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin(\delta/2)^2}$, d'où

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) \mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) \mathrm{d}t \leq \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin(\delta/2)^2}.$$

Pour $n$ assez grand on a

$$\frac{2\|f\|_\infty}{n} \cdot \frac{1}{\sin(\delta/2)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$|f(x) - \sigma_n(f)(x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in [0, 2\pi]$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $2\pi$-périodicité. On a donc $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $n$ assez grand, ce qui achève la preuve.

(2) Soit $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}$. D'après le Lemme 5(2), la mesure $\frac{K_n(t)}{2\pi} \mathrm{d}t$ sur $[0, 2\pi]$ est une mesure de probabilité. En appliquant l'inégalité de Hölder (2) à cette mesure on trouve que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sigma_n(f)(x)| \leq \int_0^{2\pi} |f(x-t)| \frac{K_n(t)}{2\pi} \mathrm{d}t \leq \left( \int_0^{2\pi} |f(x-t)|^p \frac{K_n(t)}{2\pi} \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

En élevant à la puissance $p$, puis en intégrant par rapport à $x$ on obtient, en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli,

$$\|\sigma_n(f)\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma_n(f)(x)|^p \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t)|^p \frac{K_n(t)}{2\pi} \mathrm{d}t \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} |f(x-t)|^p \mathrm{d}x \right) \frac{K_n(t)}{2\pi} \mathrm{d}t = \|f\|_p^p \cdot \|K_n\|_1 = \|f\|_p^p,$$

ce qui prouve l'inégalité voulue.

En appliquant le même raisonnement à

$$f(x) - \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f(x-t)) K_n(t) \mathrm{d}t,$$

on trouve que

$$\|f-\sigma_n(f)\|_p^p \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x-t)|^p\mathrm{d}x\right)K_n(t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(-t)K_n(t)\mathrm{d}t = \sigma_n(g)(0),$$

où on a posé $g(u)=\|f-\tau_u f\|_p^p$. D'après la Remarque 3 la fonction $g$ est continue ; en utilisant le point (1) on obtient donc que $\sigma_n(g)(0)$ tend vers $g(0)=0$ quand $n\to+\infty$, ce qui achève la preuve. □

4.4. **Quelques conséquences.**

4.4.1. *Densité des polynômes trigonométriques.* On appelle *polynôme trigonométrique* toute combinaison linéaire des fonctions $e_n$. Toute fonction $\sigma_n(f)$ est par définition un polynôme trigonométrique. Le Théorème 2(1) implique donc en particulier le résultat classique suivant.

**Corollaire 1** (Théorème de Weierstrass trigonométrique)**.** Dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)$, le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense.

Ce corollaire peut bien sûr se démontrer d'autres façons. Mais cette méthode implique par exemple le résultat plus précis disant que toute fonction $f\in\mathscr{C}_{2\pi}$ peut s'écrire comme limite d'une suite de combinaisons linéaires de fonctions $e_k$ avec $k\in\{j\in\mathbb{Z}\mid c_j(f)\neq 0\}$.

**Remarque 5.** Voir [QZ, Chap. IV, §III, Théorème III.3, p. 85–88] pour une démonstration du théorème de Weierstrass "usuel" (affirmant que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales) basée sur le Théorème 2(1).

4.4.2. *Limites ponctuelles des séries de Fourier.* Un autre corollaire est le suivant, qui dit que si la série de Fourier d'une fonction continue converge en un point, sa limite est nécessairement la valeur de la fonction en ce point.

**Corollaire 2.** Soient $f\in\mathscr{C}_{2\pi}$ et $x\in\mathbb{R}$. Si la suite $(S_n(f)(x))_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est $f(x)$.

*Démonstration.* Si la suite $(S_n(f)(x))_{n\geq 0}$ admet une limite $\ell$, alors d'après le théorème de Cesàro la suite $(\sigma_n(f)(x))_{n\geq 1}$ converge également vers $\ell$. Comme cette suite converge vers $f(x)$ par le Théorème 2(1), on doit donc avoir $\ell=f(x)$. □

4.4.3. *Unicité.* On obtient également que toute fonction est déterminée par ses coefficients de Fourier.

**Corollaire 3.** (1) Si $f,g\in\mathscr{C}_{2\pi}$, alors $f=g$ si et seulement si $c_n(f)=c_n(g)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

(2) Si $f,g\in\mathrm{L}^1_{2\pi}$, alors $f=g$ presque partout si et seulement si $c_n(f)=c_n(g)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

*Démonstration.* (1) Bien sûr, si $f=g$ alors $c_n(f)=c_n(g)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $c_n(f)=c_n(g)$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, alors $\sigma_n(f)=\sigma_n(g)$ pour tout $n\geq 1$. En passant à la limite dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)$ et en utilisant le Théorème 2(1) on en déduit que $f=g$.

(2) La preuve est la même que pour (1), en utilisant le Théorème 2(2) (dans le cas $p = 1$) plutôt que le Théorème 2(1). □

## 5. Convergence ponctuelle : le théorème de Dirichlet

5.1. **Énoncé.** Le théorème de Dirichlet est un résultat de convergence *ponctuelle* qui concerne la série de Fourier d'une fonction non nécessairement continue.

**Théorème 3** (Théorème de Dirichlet)**.** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et supposons qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (avec $\gamma > 0$) tels que

(1) $\lim_{\substack{t \to x_0 \\ t > x_0}} f(t) = \alpha$ et $\lim_{\substack{t \to x_0 \\ t < x_0}} f(t) = \beta$ ;

(2) $\int_0^\gamma \frac{|f(x_0+t)-\alpha|}{t} \mathrm{d}t < \infty$ et $\int_0^\gamma \frac{|f(x_0-t)-\beta|}{t} \mathrm{d}t < \infty$.

Alors on a

$$S_n(f)(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

**Remarque 6.** Si on a vérifié l'existence des réels $\alpha$ et $\beta$, pour démontrer que $\gamma$ existe il suffit de vérifier que $f$ admet des dérivées à droite et à gauche en $x_0$, au sens où les fonctions

$$t \mapsto \frac{f(x_0 + t) - \alpha}{t} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{f(x_0 - t) - \beta}{t}$$

admettent des limites quand $t \to 0$ avec $t > 0$.

5.2. **Étude du noyau de Dirichlet.** Comme pour le théorème de Fejér, la preuve du Théorème 3 va utiliser une interprétation de $S_n(f)$ comme convolution avec un noyau approprié. Pour $n \geq 0$, posons

$$D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

**Lemme 6.** (1) Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a

$$D_n(x) = \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}.$$

En particulier, la fonction $D_n$ est paire.

(2) Pour tout $n \geq 0$ on a $c_0(D_n) = 1$.

*Démonstration.* (1) Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned} D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} &= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \\ = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} &= \frac{\sin\big((n+1/2)x\big)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Cette fonction est paire (sur $\mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$, et donc sur $\mathbb{R}$ par continuité) puisque c'est un quotient de 2 fonctions impaires.

(2) L'égalité est immédiate d'après la définition de $D_n$ et le Lemme 1. □

**Remarque 7.** La différence essentielle entre le noyau de Dirichlet et le noyau de Fejér étudié à la partie 4 est que celui de Dirichlet n'est *pas* à valeurs positives.

5.3. **Preuve du Théorème de Dirichlet.** On peut maintenant démontrer le théorème de Dirichlet.

*Preuve du Théorème 3.* On fixe $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose qu'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma$ comme dans l'énoncé.

En utilisant (6) on voit que

$$S_n(f) = D_n \star f,$$

et donc que

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_n(t) \mathrm{d}t.$$

Puisque $D_n$ est paire (voir le Lemme 6(1)), on a également

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) D_n(t) \mathrm{d}t.$$

En utilisant le Lemme 6(2), on en déduit que

$$S_n(f)(x_0) - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - \alpha - \beta) D_n(t) \mathrm{d}t.$$

En posant pour $t \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$h(t) = \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - \alpha - \beta}{2 \sin(t/2)}$$

on obtient donc finalement que

$$S_n(f)(x_0) - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin((n + 1/2)t) \mathrm{d}t.$$

Or on a

$$h(t) = \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - \alpha - \beta}{2 \sin(t/2)} = \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - \alpha - \beta}{t} \cdot \frac{t/2}{\sin(t/2)},$$

et la fonction $t \mapsto \frac{t/2}{\sin(t/2)}$ se prolonge par continuité en 0, donc est bornée sur $[-\pi, \pi]$. Au vu de cette propriété, notre hypothèse implique que $h$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$. En observant que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin((n + 1/2)t) \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \frac{e^{i((n+1/2)t)} - e^{-i((n+1/2)t)}}{2i} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{it/2} \cdot e^{int} \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-it/2} \cdot e^{-int} \mathrm{d}t \right), \end{aligned}$$

où les fonctions $t \mapsto h(t) e^{\pm it/2}$ sont $2\pi$-périodiques, le résultat voulu découle alors du lemme de Riemann–Lebesgue (Proposition 5). □

## 6. Théorie $\mathrm{L}^2$ : la formule de Parseval

6.1. **Rappels sur les bases hilbertiennes.** Pour la théorie générale des espaces (pré)hilbertiens, on pourra consulter [Sk, Chap. 8] ou [Go, App. B]. Pour un survol rapide, voir la feuille de Topologie.

Rappelons qu'un espace préhilbertien complexe est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où $E$ est un espace vectoriel complexe et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien, c'est-à-dire une application $E \times E \to \mathbb{C}$ qui vérifie :

— pour $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
$$\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle$$
et
$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, z\rangle + \overline{\mu}\langle y, z\rangle;$$
— pour $x, y \in E$, $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ ;
— pour $x \in E \smallsetminus \{0\}$, $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dans ce cas, l'application $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définit une norme sur $E$.

Dans la suite de ce paragraphe on fixe un espace préhilbertien complexe $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$. Le résultat suivant se vérifie immédiatement sur les définitions.

**Lemme 7** (Théorème de Pythagore)**.** Pour tous $x, y \in E$ on a
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle).$$
En particulier, si $x$ et $y$ sont orthogonaux (c'est-à-dire si $\langle x, y\rangle = 0$) alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Rappelons que si $V \subset E$ est un sous-espace vectoriel *de dimension finie* de $E$, alors on a
$$E = V \oplus V^\perp.$$
De façon plus explicite, si on se donne une base $(x_1, \dots, x_m)$ de $V$ qui est orthonormée pour la restriction de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ à $V$ (c'est-à-dire que $\langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$), alors pour tout $x \in E$ on a
$$x = \left(\sum_{j=1}^m \langle x_j, x\rangle x_j\right) + \left(x - \sum_{j=1}^m \langle x_j, x\rangle x_j\right)$$
où le premier terme appartient à $V$ et le deuxième à $V^\perp$. D'après le théorème de Pythagore (Lemme 7) on a alors
$$\sum_{j=1}^m |\langle x_j, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Lemme 8** (Inégalité de Bessel)**.** Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormée de vecteurs de $E$. Pour tout $x \in E$ la série de terme général $|\langle e_n, x\rangle|^2$ converge, et on a
$$\sum_{n\geq 0} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Démonstration.* Pour tout $N \geq 0$, les considérations précédentes montrent que
$$\sum_{n=0}^N |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$
La suite de terme général $\sum_{n=0}^N |\langle e_n, x\rangle|^2$ est donc croissante et majorée, et par suite convergente. □

Une *base hilbertienne*[5] de $E$ est une famille orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ telle que le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les $e_n$ est dense dans $E$.

**Proposition 7.** Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de $E$.

5. Attention ! Une base hilbertienne n'est pas en général une base de $E$ au sens des espaces vectoriels. Par ailleurs, on ne demande pas nécessairement à $E$ d'être un espace de Hilbert...

(1) Pour tout $x \in E$, la suite de terme général
$$\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$$
converge vers $x$ ;

(2) Pour tout $x \in E$ on a
$$\sum_{n\geq 0} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \|x\|^2$$
(égalité de Parseval).

(3) Pour tous $x, y \in E$ on a
$$\sum_{n\geq 0} \overline{\langle e_n, x\rangle} \cdot \langle e_n, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

*Démonstration.* Fixons $x \in E$, et considérons un $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe une combinaison linéaire $y$ des $e_k$ telle que $\|x - y\| < \varepsilon$. Pour $n$ assez grand, on a alors $y \in \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$. Puisque $\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k - y$ appartient à ce sous-espace il est orthogonal à $x - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$, et le théorème de Pythagore (Lemme 7) assure que
$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\|^2 \leq \|x - y\|^2 < \varepsilon^2,$$
donc que
$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\| < \varepsilon,$$
ce qui prouve la convergence de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$ vers $x$.

Pour démontrer l'égalité de Parseval on remarque que
$$\sum_{k=0}^{n} |\langle e_k, x\rangle|^2 = \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k \right\|^2,$$
et on utilise la continuité de l'application $\| \cdot \|^2$.

Enfin, pour la dernière égalité, on remarque que
$$\sum_{k=0}^{n} \overline{\langle e_k, x\rangle} \cdot \langle e_k, y\rangle = \langle \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k, y\rangle,$$
puis on fait tendre $n$ vers $+\infty$ et on utilise la continuité de la fonction $\langle \cdot, y\rangle$. $\square$

**Remarque 8.** Ci-dessus on n'a considéré que des bases hilbertiennes indexées par $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Cela pose un petit problème de logique quand on considère les séries de Fourier, où l'ensemble d'indices est plus naturellement $\mathbb{Z}$. Pour appliquer la théorie dans ce cadre, on considérera la bijection de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$ envoyant $2n$ sur $n$ et $2n+1$ sur $-n-1$ (pour tout $n \geq 0$). Une autre solution serait de considérer des bases hilbertiennes indexées par des ensembles $I$ quelconques ; ceci nécessite d'utiliser la sommation au sens des familles sommables.

Notons que dans un espace préhilbertien *séparable* (c'est-à-dire possédant une partie dénombrable dense), une base hilbertienne existe toujours, et peut être obtenue en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt à une famille libre indexée par $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et dont l'espace engendré est dense. (Pour des détails, voir par exemple https://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka/ANAH/Week%20by%20week/2012-2013/ANAH10.pdf)

6.2. **Application aux séries de Fourier.** On considère maintenant l'espace pré-hilbertien $\mathrm{L}^2_{2\pi}$. On remarque que pour tout $f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$ on a

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle. \tag{7}$$

**Lemme 9.** La famille $(e_n : n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$.

*Démonstration.* Compte tenu de l'égalité (7), le Lemme 1 montre que notre famille est orthonormée. D'autre part, le théorème de Fejér dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ (Théorème 2(2) dans le cas $p = 2$) montre que le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense. [6] □

En appliquant la Proposition 7 dans ce cas particulier, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 4.** Pour toute $f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$, la suite $(S_n(f))_{n\geq 0}$ converge vers $f$ dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$. De plus, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Pour $f, g \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$, on a également

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g).$$

**Remarque 9.** L'égalité de Parseval donne une autre démonstration du fait que pour $f, g \in \mathrm{L}^2_{2\pi}$, si $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors $f = g$ presque partout (ce qui est un cas particulier du Corollaire 3). En particulier, si $f$ et $g$ sont continues elles sont dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ ; si $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a donc $f = g$ presque partout, et donc $f = g$ par continuité. (Bien sûr, ce commentaire ne peut être intéressant que si on a démontré le théorème de Weierstrass trigonométrique par une autre méthode que celle passant par le théorème de Fejér, puisqu'on a obtenu un résultat plus fort comme corollaire immédiat de ce théorème...)

## 7. Convergence normale

On termine avec un dernier résultat de convergence (normale).

**Théorème 5.** Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$, et supposons $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de $f$ converge normalement vers $f$ sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$$

et la suite $(S_n(f))_{n\geq 0}$ converge vers $f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* En considérant une fonction $Df$ comme dans la Proposition 4, ce résultat montre que pour $n \neq 0$ on a

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(Df)|}{n}.$$

6. Alternativement, on peut démontrer cette propriété en disant que les fonctions continues sont denses dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ (Proposition 3) et que toute fonction continue est limite uniforme (et donc pour la norme $\|\cdot\|_2$ également) de polynômes trigonométriques par le Théorème de Weierstrass trigonométrique (Corollaire 1).

En utilisant l'inégalité classique $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(Df)|^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Or $Df$ est bornée, donc dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ ; en appliquant l'égalité de Parseval on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(Df)|^2 < +\infty.$$

D'autre part on a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$, et donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

Maintenant que ce résultat est établi, on peut considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie comme la limite de la série de fonctions normalement convergente

$$c_0(f) + \sum_{n\geq 1}(c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}).$$

Pour terminer la preuve, il suffit de voir que $f = g$. Or $g$ est la limite d'une suite de fonctions uniformément convergente ; comme chaque somme partielle

$$\sum_{|n|\leq N} c_n(f)e_n$$

est continue, $g$ est donc continue. Elle est bien sûr $2\pi$-périodique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par convergence uniforme on a

$$c_n(g) = \lim_{N\to+\infty} c_n\left(\sum_{|k|\leq N} c_k(f)e_k\right) = c_n(f)$$

d'après le Lemme 1. D'après le Corollaire 3(1), ceci implique que $f = g$, comme souhaité. □

## 8. Applications

Les séries de Fourier ont des applications intéressantes à de nombreux sujets.

8.1. **Une application du théorème de Dirichlet : valeurs de la fonction $\zeta$ en les entiers pairs positifs.** Rappelons que la *fonction $\zeta$ de Riemann* est définie, pour $s > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Dans cette partie on souhaite démontrer le résultat suivant.

**Proposition 8.** Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\zeta(2k) \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{2k}.$$

De façon plus explicite, on a

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \cdots$$

Pour démontrer cette proposition, on fixe $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ et on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est $2\pi$-périodique et vérifie

$$f(t) = e^{iat} \quad \text{pour tout } t \in [-\pi, \pi[.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(a-n)t}}{i(a-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ = \frac{e^{i(a-n)\pi} - e^{-i(a-n)\pi}}{2\pi i(a-n)} = \frac{\sin((a-n)\pi)}{\pi(a-n)} = (-1)^n \frac{\sin(a\pi)}{\pi(a-n)}. \end{aligned}$$

On va appliquer le théorème de Dirichlet (Théorème 3) à cette fonction pour $x_0 = \pi$. Tout d'abord on a

$$\lim_{\substack{t \to \pi \\ t < \pi}} f(t) = e^{ia\pi}, \quad \lim_{\substack{t \to \pi \\ t > \pi}} f(t) = e^{-ia\pi}.$$

Il est par ailleurs facile de vérifier que les conditions de la Remarque 6 sont satisfaites. Le théorème s'applique donc bien, et assure que

$$S_n(f)(\pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{e^{ia\pi} + e^{-ia\pi}}{2} = \cos(a\pi).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} S_n(f)(\pi) = \sum_{|k| \leq n} (-1)^k \frac{\sin(a\pi)}{\pi(a-k)} e^{ik\pi} = \sum_{|k| \leq n} \frac{\sin(a\pi)}{\pi(a-k)} \\ = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k} \right) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2a}{a^2 - k^2}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{a}{a^2 - k^2}.$$

Finalement, remarquons que si $|a| < k$ alors

$$\frac{a}{a^2 - k^2} = \frac{-a}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{a}{k})^2} = \frac{-a}{k^2} \cdot \sum_{j \geq 0} \left( \frac{a}{k} \right)^{2j};$$

on peut donc écrire, si $|a| < 1$,

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2 \sum_{k \geq 1} \left( \frac{-a}{k^2} \cdot \sum_{j \geq 0} \left( \frac{a}{k} \right)^{2j} \right).$$

On va maintenant comparer cette égalité avec le développement limité

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} &= \frac{1 - x^2/2 + x^4/24 + \mathrm{o}(x^4)}{x - x^3/6 + x^5/120 + \mathrm{o}(x^5)} \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \mathrm{o}(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \mathrm{o}(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{7}{360} - \frac{1}{12}\right)x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

Remarquons que si $|a| < 1$ la somme

$$\sum_{\substack{j\geq 0\\ k\geq 1}} \left| \frac{-a}{k^2} \cdot \left(\frac{a}{k}\right)^{2j} \right| \tag{8}$$

(qu'on interprète comme une intégrale pour la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$) est finie. En effet on a

$$\left| \frac{-a}{k^2} \cdot \left(\frac{a}{k}\right)^{2j} \right| = \frac{|a|^{2j+1}}{k^{2j+2}}.$$

Pour $k \geq 1$ fixé on a

$$\sum_{j\geq 0} \frac{|a|^{2j+1}}{k^{2j+2}} = \frac{|a|}{k^2 - |a|^2}.$$

Et comme $\frac{|a|}{k^2-a^2} \sim_{+\infty} \frac{|a|}{k^2}$, la somme

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 0} \frac{|a|^{2j+1}}{k^{2j+2}}$$

est finie, ce qui prouve que la somme (8) est finie (par le théorème de Fubini–Tonelli).

On peut ensuite appliquer le théorème de Fubini (toujours pour la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$), qui implique que si $|a| < 1$ on a

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{-a}{k^2} \cdot \sum_{j\geq 0}\left(\frac{a}{k}\right)^{2j}\right) = \sum_{j\geq 0}\left((-a^{2j+1}) \cdot \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+2}}\right) = \sum_{j\geq 0}(-a^{2j+1}) \cdot \zeta(2j+2),$$

et donc

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + \sum_{j\geq 0}(-2\zeta(2j+2)) \cdot a^{2j+1}.$$

Finalement, en comparant avec le développement limité ci-dessus, on obtient que

$$-2\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{3}, \quad -2\zeta(4) = -\frac{\pi^4}{45}.$$

Et puisque le développement limité de $\frac{1}{\tan(x)}$ ne fera apparaître que des coefficients rationnels, on obtient que pour tout $j \geq 0$ on a

$$\zeta(2j+2) \in \pi^{2j+2} \cdot \mathbb{Q}.$$

**Remarque 10.** La nombre rationnel $\zeta(2k)/\pi^{2k}$ peut s'exprimer en terme des polynômes de Bernoulli. Pour plus de détails, on pourra consulter [PRTGDLC, Exercice 41].

8.2. **Une autre application : l'équation de la chaleur sur un anneau.** Cette partie est tirée de [FGN2, Exercice 1.28]. Elle illustre l'utilité des séries de Fourier dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, en l'occurrence l'équation de la chaleur. C'est d'ailleurs historiquement ce problème qui a conduit Fourier à introduire les séries qui portent son nom.

8.2.1. *Rappels sur les intégrales à paramètres.* Dans cette partie nous aurons besoin de résultats classiques de régularité des intégrales à paramètres, qu'on rappelle ci-dessous.

**Théorème 6** (Théorème de continuité des intégrales à paramètre)**.** Soient $E$ un espace métrique et $X$ un espace mesuré, et soit $f : E \times X \to \mathbb{C}$ une fonction. On fixe $t_0 \in E$. On suppose que :

(1) pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable sur $X$ ;
(2) pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0$ ;
(3) il existe $g \in \mathrm{L}^1(X)$ telle que pour tout $t \in E$ on a $|f(t,x)| \leq g(x)$ presque partout en $x$.

Alors la fonction $F : E \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(t) = \int_X f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

est bien définie et est continue en $t_0$.

Voir [BP, Théorème 8.5].

**Théorème 7** (Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre)**.** Soient $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $X$ un espace mesuré, et soit $f : I \times X \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que :

(1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $X$ ;
(2) pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $I$ ;
(3) il existe $g \in \mathrm{L}^1(X)$ telle que pour tout $t \in I$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$$

presque partout en $x$.

Alors la fonction $F : I \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(t) = \int_X f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$$

est bien définie et dérivable sur $I$, de dérivée

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Voir [BP, Corollaire 8.1].

8.2.2. *L'équation.* On se fixe donc une fonction $u_0 \in \mathscr{C}_{2\pi}$, supposée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et on cherche les applications continues

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (t,x) & \mapsto & u(t,x) \end{array} \right. ,$$

de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques par rapport à $x$, et telles que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u(0,x) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

8.2.3. *Analyse (unicité).* On suppose que $u$ est une solution du problème. Pour tout $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $2\pi$-périodique. Elle est donc limite uniforme de sa série de Fourier (voir le Théorème 5) : si on pose

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} \mathrm{d}x \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z},$$

alors on a

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}. \tag{10}$$

Cette égalité est en fait également vérifiée pour $t = 0$, puisque $u_0$ est limite de sa série de Fourier (toujours par le Théorème 5).

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)e^{-inx}$ est continue sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi]$, donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre (Théorème 6), la fonction $t \mapsto c_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. (Pour vérifier la condition de domination, il suffit de se restreindre à un intervalle $[0, A]$, et de dire que $u$ est bornée sur le compact $[0, A] \times [0, 2\pi]$.) De même, le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre (Théorème 7) assure que $c_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$, et que

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

D'après l'équation vérifiée par $u$, ceci implique que

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

En intégrant par partie deux fois, on en déduit que

$$c_n'(t) = -n^2 c_n(t),$$

et donc qu'il existe une constante $k \in \mathbb{C}$ telle que

$$c_n(t) = k e^{-n^2 t}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Comme $c_n(0) = c_n(u_0)$, par continuité on obtient finalement que

$$c_n(t) = c_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ceci démontre l'unicité d'une éventuelle solution, au vu de (10).

8.2.4. *Synthèse (existence).* Réciproquement, on considère la fonction $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Ici, puisque $u_0$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le Théorème 5 on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(u_0)| < +\infty,$$

ce qui montre que la série définissant $u$ est normalement convergente ; $u$ est donc bien définie, et continue sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$. Elle est clairement $2\pi$-périodique par rapport à $x$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ (ou, de façon équivalente, sur $]\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}$ pour tout $\varepsilon > 0$) et qu'elle vérifie les conditions (9).

La deuxième condition est claire, par définition et puisque $u_0$ est limite de sa série de Fourier d'après le Théorème 5. Pour montrer que $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit de montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont bien définies, et continues. On se fixe donc un $\varepsilon > 0$, et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction

$$(t,x) \mapsto c_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, avec pour dérivées partielles selon $t$ et $x$ données par

$$-n^2 c_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx} \quad \text{et} \quad inc_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx}$$

respectivement. Sur $]\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}$, ces fonctions sont majorées (en module) par

$$n^2 \|u_0\|_1 \cdot e^{-n^2 \varepsilon} \quad \text{et} \quad n\|u_0\|_1 \cdot e^{-n^2 \varepsilon}$$

respectivement. Les séries de termes généraux $n^2\|u_0\|_1 \cdot e^{-n^2\varepsilon}$ et $n\|u_0\|_1 \cdot e^{-n^2\varepsilon}$ étant convergentes, le théorème de dérivation des suites de fonctions assure que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ existent effectivement sur $]\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}$, sont continues, et sont données par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 c_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx}$$

respectivement. En particulier, ceci prouve que $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Des considérations similaires montrent que $u$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et qu'on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2 c_n(u_0) \cdot e^{-n^2 t} e^{inx}$$

sur $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. L'équation de (9) est donc bien vérifiée, ce qui achève la preuve.

**Remarque 11.** Pour une variante de cette application, on pourra consulter [QZ, Chap. IV, §VI.3].

8.3. **Construction de fonctions continues nulle part dérivable.**

8.3.1. *Construction.* Cette partie est tirée de [QZ, Chap. VI, §VI.4(a)]. Fixons une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes qui vérifient

$$\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_n| < \infty. \tag{11}$$

Soit également $q \in \mathbb{R}_{>1}$, et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers strictements positifs qui vérifie

$$\lambda_{n+1} \geq q\lambda_n$$

pour tout $n \geq 1$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \varepsilon_0 + \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}.$$

L'hypothèse (11) assure que cette série est absolument convergente ; la fonction $f$ est donc bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs clairement $2\pi$-périodique. L'objectif de cette partie est de montrer l'énoncé suivant.

**Proposition 9.** Si $f$ est dérivable en un point de $\mathbb{R}$, alors on a

$$\varepsilon_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \qquad \text{en } +\infty. \tag{12}$$

En particulier, si on choisit les données telles que (12) n'est pas vérifiée (par exemple, avec $q$ entier, $\lambda_n = q^n$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n}$), alors $f$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Pour la preuve de ce résultat, pour $n \geq 2$ on posera

$$\mu_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1}).$$

8.3.2. *Le noyau de Jackson.* On considère pour $N \geq 0$ le noyau de Fejér $K_N$ considéré au §4.2, et le *noyau de Jackson* défini par

$$J_N = \frac{1}{\|K_N^2\|_1} K_N^2.$$

Notons que, par le Lemme 5(1), $J_N$ est une fonction à valeurs réelles positives.

**Lemme 10.** (1) Pour tout $N \geq 0$, on a

$$J_N \in 1 + \mathrm{Vect}(e_k : 0 < |k| \leq 2N).$$

(2) Il existe $a > 0$ tel que pour tout $N \geq 0$ on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)^2 \mathrm{d}t \geq aN.$$

(3) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, il existe une constante $M_k > 0$ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t) \mathrm{d}t \leq M_k \cdot N^{-k}$$

pour tout $N \geq 1$.

*Démonstration.* (1) Il est clair que $J_N \in \mathrm{Vect}(e_k : -2N \leq k \leq 2n)$. D'autre part on a $\|J_N\|_1 = 1$ ; comme $J_N$ est une fonction à valeurs réelles positives, ceci implique que $c_0(K_N) = 1$. Ce qui prouve l'énoncé (au vu du Lemme 1).

(2) En utilisant la formule pour $K_N$ obtenue au Lemme 5(1), on voit que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{N^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{N^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 \mathrm{d}t = \frac{4}{N^2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(Nu)}{\sin(u)}\right)^4 \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(Ici la deuxième égalité utilise la parité, et la troisième un changement de variable $u = t/2$. En utilisant le fait que

$$\sin(u) \leq u \quad \text{pour tout } u \geq 0$$

(ce qui peut se vérifier facilement par une étude des variations de la fonction $u - \sin(u)$) on obtient que

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)^2 \mathrm{d}t \geq \frac{4}{N^2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin(Nu)}{u} \right)^4 \mathrm{d}u.$$

On fait ensuite un changement de variable $y = Nu$ pour obtenir que

$$\frac{4}{N^2} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin(Nu)}{u} \right)^4 \mathrm{d}u = 4N \int_0^{N\pi/2} \left( \frac{\sin(y)}{y} \right)^4 \mathrm{d}y \geq 4N \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\sin(y)}{y} \right)^4 \mathrm{d}y,$$

ce qui achève la preuve.

(3) En utilisant la parité puis un changement de variable $u = t/2$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t) \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi} t^k J_N(t) \mathrm{d}t = 2^{k+2} \int_0^{\pi/2} u^k J_N(2u) \mathrm{d}u.$$

Avec $a$ comme dans (2), on a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t) \mathrm{d}t \leq \frac{2^{k+2}}{aN^3} \int_0^{\pi/2} u^k \left( \frac{\sin(Nu)}{\sin(u)} \right)^4 \mathrm{d}u.$$

On utilise maintenant le fait que

$$\sin(u) \geq \frac{2}{\pi} u \quad \text{pour tout } u \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

(ce qui, encore une fois, se vérifie facilement par une étude de fonction) pour obtenir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t) \mathrm{d}t \leq \frac{2^{k-2}\pi^2}{aN^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(Nu)^4}{u^{4-k}} \mathrm{d}u.$$

On fait maintenant un changement de variable $y = Nu$ pour obtenir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_N(t) \mathrm{d}t \leq \frac{2^{k-2}\pi^2}{a} \cdot N^{-k} \int_0^{N\pi/2} \frac{\sin(y)^4}{y^{4-k}} \mathrm{d}y.$$

Finalement, on utilise le fait que la fonction $y \mapsto \frac{\sin(y)^4}{y^{4-k}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $4 - k > 1$ pour dire que

$$\int_0^{N\pi/2} \frac{\sin(y)^4}{y^{4-k}} \mathrm{d}y \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)^4}{y^{4-k}} \mathrm{d}y,$$

ce qui conclut la preuve. □

8.3.3. *Préliminaires.*

**Lemme 11.** Pour tous entiers $n \geq 2$ et $k$ tel que $0 < |k| < \mu_n$, on a $c_{\lambda_n - k}(f) = 0$.

*Démonstration.* Il est clair par convergence normale que $c_m(f) = 0$ si $m \notin \{0\} \cup \{\lambda_p : p \geq 1\}$. Si les entiers $n$ et $k$ sont comme dans l'énoncé on a $\lambda_{n-1} < \lambda_n - k < \lambda_{n-1}$, et $\lambda_n - k \neq \lambda_n$. Donc $\lambda_n - k$ n'est ni 0 ni l'un des $\lambda_p$, ce qui montre l'énoncé. □

**Lemme 12.** Si $n, p$ sont des entiers tels que $n \geq 2$ et $1 \leq p < \frac{\mu_n}{2}$, on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) J_p(t) e^{-i\lambda_n t} \mathrm{d}t.$$

*Démonstration.* D'après le Lemme 10(1) on peut écrire

$$J_p = 1 + \sum_{\substack{k=-2p \\ k\neq 0}}^{2p} \alpha_k e_k.$$

On a alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)J_p(t)e^{-i\lambda_n t}\mathrm{d}t = c_{\lambda_n}(f) + \sum_{\substack{k=-2p \\ k\neq 0}}^{2p} \alpha_k c_{\lambda_n - k}(f),$$

et donc l'affirmation découle du Lemme 11. □

8.3.4. *Preuve.* On peut maintenant expliquer la preuve de la Proposition 9.

Supposons tout d'abord que $f$ est dérivable en 0, et que $f(0) = f'(0) = 0$. On fixe $\alpha > 0$. Notre hypothèse implique alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \alpha t$$

pour tout $t \in [-\delta, \delta]$.

On pose $r = 1 - \frac{1}{q}$. Alors pour $n \geq 2$ on a

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq (q-1)\lambda_n \geq r\lambda_n$$

et

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \lambda_n - \frac{\lambda_n}{q} = r\lambda_n.$$

On a donc

$$\mu_n \geq r\lambda_n.$$

En particulier, ceci implique que $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ; il existe donc un entier $n_0 \geq 2$ tel que

$$p_n := \lfloor \frac{\mu_n}{2} \rfloor - 1$$

est supérieur ou égal à 1 pour tout $n \geq n_0$. Pour tout $n \geq n_0$, le Lemme 12 implique qu'on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)J_{p_n}(t)e^{-i\lambda_n t}\mathrm{d}t.$$

Cette égalité montre qu'on a alors

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_n| &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta}|f(t)|J_{p_n}(t)\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{-\delta}|f(t)|J_{p_n}(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi}|f(t)|J_{p_n}(t)\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\alpha|t|J_{p_n}(t)\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{-\delta}\frac{t^2}{\delta^2}\|f\|_\infty J_{p_n}(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi}\frac{t^2}{\delta^2}\|f\|_\infty J_{p_n}(t)\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|J_{p_n}(t)\mathrm{d}t + \frac{\|f\|_\infty}{2\pi\delta^2}\int_{-\pi}^{\pi}t^2J_{p_n}(t)\mathrm{d}t \\
&\leq M\left(\frac{\alpha}{p_n} + \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2 p_n^2}\right)
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $M > 0$, où la dernière inégalité utilise le Lemme 10(3). On en déduit que

$$p_n|\varepsilon_n| \leq M\alpha + \frac{M\|f\|_\infty}{\delta^2 p_n},$$

et donc que $p_n|\varepsilon_n| \leq 2M\alpha$ pour $n$ assez grand. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on a

$$p_n|\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $p_n \geq \frac{\mu_n}{2} - 2 \geq \frac{r}{2}\lambda_n - 2$, on a aussi

$$\lambda_n|\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui achève la preuve dans le cas considéré.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f$ est dérivable en $t_0$, et on pose

$$g(t) = f(t+t_0) - f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{i\lambda_1} - \frac{f'(t_0)}{i\lambda_1}e^{i\lambda_1 t}.$$

Alors $g$ est de la forme considérée au §8.3.1 (pour la suite $(\varepsilon'_n)_{n\geq 0}$ définie par $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 - f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{i\lambda_1}$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 e^{i\lambda_1 t_0} - \frac{f'(t_0)}{i\lambda_1}$, et $\varepsilon'_n = \varepsilon_n e^{i\lambda_n t_0}$ si $n \geq 2$) et vérifie $g(0) = g'(0) = 0$. Le cas traité c-dessus montre alors l'énoncé voulu.

8.4. **Autres applications.** Pour une application à la preuve de l'inégalité isopérimétrique (qui est très jolie mais nécessite d'être au point sur la théorie des courbes planes) voir [QZ, Chap. IV, §VI.2].

Une autre application classique est la formule sommatoire de Poission ; pour cela, voir par exemple [Go, Chap. 4, §6, Problème 4] ou [QZ, Chap. IV, §IV.2, Exemple IV.8].

## 9. Deux phénomènes de non-convergence

La plupart des résultats des parties précédentes concerne la *convergence* des séries de Fourier. Il ne faut pas croire cependant que les séries de Fourier convergent toujours.

9.1. **Non convergence ponctuelle.** Une application classique du théorème de Banach–Steinhaus (et donc du théorème de Baire) montre qu'il existe des fonctions $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ telles que la suite $(S_n(f)(0))_{\geq 0}$ n'est pas convergente ; voir [Go, Annexe A, Ex. 8, p. 425].[7] Dans cette partie on va donner une construction *explicite* d'une telle fonction, due à Fejér, en suivant [Go, Chap. 4, §5.5, Ex. 4, p. 275].

Pour $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on pose

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)\sin\left((m+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t,$$

puis

$$s_{n,m} = a_{0,m} + 2\sum_{k=1}^{n} a_{k,m}.$$

**Lemme 13.** Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on a

$$a_{n,m} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{m+\frac{1}{2}}{(m+\frac{1}{2})^2 - n^2}.$$

7. Cette démonstration fait l'objet d'une question de l'exercice 18 de la feuille sur la leçon 208.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}\cos(nt)\sin\left((m+\frac{1}{2})t\right) &= \frac{e^{int}+e^{-int}}{2}\cdot\frac{e^{i(m+1/2)t}-e^{-i(m+1/2)t}}{2i}\\ = \frac{1}{4i}&\left(e^{i(n+m+1/2)t}-e^{i(n-m-1/2)t}+e^{i(m-n+1/2)t}-e^{-i(n+m+1/2)t}\right)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin((n+m+1/2)t)+\sin((m-n+1/2)t)\Big).\end{aligned}$$

On obtient donc que

$$a_{n,m} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+m+1/2}+\frac{1}{m-n+1/2}\right).$$

En mettant les deux fractions au même dénominateur, on obtient la formule voulue. □

**Lemme 14.** Pour tout $m \geq 0$, la suite $(s_{n,m})_{n\geq 0}$ converge vers 0. De plus, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on a $s_{n,m} > 0$.

*Démonstration.* Fixons $m \geq 0$, et considérons la fonction $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est $2\pi$-périodique, paire et telle que

$$g_m(t) = \sin((m+1/2)t)$$

pour $t \in [0, \pi]$. Cette fonction est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et donc limite uniforme de sa série de Fourier d'après le Théorème 5.

Calculons maintenant ses coefficients de Fourier. Pour tout $n \geq 0$ on a

$$c_n(g_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_m(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_m(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

par parité. Toujours par parité, on obtient que

$$c_n(g_m) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((m+1/2)t)\cos(nt)\mathrm{d}t = a_{n,m}.$$

En considérant la valeur de la série de Fourier en 0, on en déduit que la série de terme général $a_{n,m}$ converge, et que

$$a_{0,m} + 2\sum_{n\geq 1} a_{n,m} = g_m(0) = 0.$$

Ce qui montre comme souhaité que

$$s_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La formule du Lemme 13 montre que $a_{n,m} > 0$ si $n \leq m$, et $a_{n,m} < 0$ si $n > m$. Donc la suite $(s_{n,m})_{n\geq 0}$ est strictement croissante (et positive) des indices 0 à $m$, puis strictement décroissante. Comme elle converge vers 0, elle ne peut donc prendre que des valeurs strictement positives. □

**Lemme 15.** Pour tout $m \geq 1$ on a $s_{m,m} \geq \frac{\ln(m)}{\pi}$.

*Démonstration.* En utilisant la formule du Lemme 13 on voit que

$$s_{m,m} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{m+1/2}{(m+1/2)^2 - k^2} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{k-1}^{k} \frac{m+1/2}{(m+1/2)^2 - t^2} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{m} \frac{m+1/2}{(m+1/2)^2 - t^2} \mathrm{d}t$$

où, dans la deuxième inégalité, on utilise le fait que la fonction $t \mapsto \frac{m+1/2}{(m+1/2)^2 - t^2}$ est croissante sur $[0, m]$. Maintenant on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{m+1/2}{(m+1/2)^2 - t^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m+1/2+t} + \frac{1}{m+1/2-t} \right),$$

et donc

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{m} \frac{m+1/2}{(m+1/2)^2 - t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \Big( [\ln(m+1/2+t)]_0^m + [-\ln(m+1/2-t)]_0^m \Big)$$
$$= \frac{1}{\pi} \Big( \ln(2m+1/2) - \ln(m+1/2) - \ln(1/2) + \ln(m+1/2) \Big) = \frac{1}{\pi} \ln(4m+1),$$

ce qui implique l'inégalité voulue. □

On va maintenant considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est paire, $2\pi$-périodique et qui vérifie

$$f(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \sin \left( (2^{p^3} + 1) \frac{x}{2} \right) \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

En tant que limite d'une série de fonctions continues normalement convergente, cette fonction est continue sur $[0, \pi]$ ; puisqu'elle est paire et $2\pi$-périodique elle appartient donc à $\mathscr{C}_{2\pi}$.

Calculons maintenant ses coefficients de Fourier. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t$$

par parité. Puisque la série définissant $f$ sur $[0, \pi]$ converge normalement, on peut intervertir la somme et l'intégrale pour voir que

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \int_{0}^{\pi} \sin \left( (2^{p^3} + 1) \frac{x}{2} \right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} a_{|n|, 2^{p^3 - 1}}.$$

On a donc

$$S_n(f)(0) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} s_{n, 2^{p^3 - 1}}$$

pour tout $n \geq 1$.

Puisque les $s_{n, 2^{p^3} - 1}$ sont positifs (voir le Lemme 14), on a

$$S_{2^{p^3 - 1}}(f)(0) \geq \frac{1}{p^2} s_{2^{p^3 - 1}, 2^{p^3 - 1}} \geq \frac{1}{\pi p^2} \cdot \ln(2^{p^3 - 1}) = \frac{\ln(2)}{\pi} \cdot \frac{p^3 - 1}{p^2}$$

d'après le Lemme 15. Ceci montre que

$$S_{2^{p^3 - 1}}(f)(0) \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty,$$

et donc que la série de Fourier de $f$ en 0 diverge.

9.2. **Convergence non uniforme : le phénomène de Gibbs.** Dans cette partie on va illustrer sur un exemple le “phénomène de Gibbs”, qui dit que les fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais non continues sont mal approximées par leurs sommes partielles de Fourier au voisinage des points de discontinuité. On suivra [FGN1, Ex. 4.25].

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est $2\pi$-périodique et telle que $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi[$.

**Lemme 16.** Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f) = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0\,; \\ \frac{i}{n} & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

*Démonstration.* On calcule simplement les intégrales :

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} [t^2/2]_0^{2\pi} = \pi$$

et, si $n \neq 0$, par intégration par parties

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} te^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{te^{-int}}{-in} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{in}\mathrm{d}t \right) = \frac{i}{n}. \qquad \square$$

Pour $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose maintenant

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k(t) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

D'après le théorème de Dirichlet (Théorème 3 ; voir la Remarque 6 pour les hypothèses), on a convergence ponctuelle des sommes de Fourier de $f$. Plus précisément, on a

$$S_n(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$$

(en fait, $S_n(0) = \pi$ pour tout $n$) et

$$S_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} t$$

pour $t \in ]0, 2\pi[$. Bien sûr, la convergence de la suite de fonctions $S_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, puisque sinon sa limite serait continue, ce qui n'est pas le cas. Mais on peut mesurer ce phénomène plus précisément.

Dérivons la fonction $S_n$ : on trouve que

$$S_n'(t) = -2 \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -2\mathrm{Re} \left( \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} \right).$$

Si $t = 0$ on a

$$S_n'(0) = -2n,$$

et si $t \in ]0, 2\pi[$ on a

$$S_n'(t) = -2\mathrm{Re} \left( e^{it} \cdot \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} \right) = -2\mathrm{Re} \left( e^{i\frac{n+1}{2}t} \cdot \frac{e^{i\frac{nt}{2}} - e^{-i\frac{nt}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} \right)$$
$$= -2 \frac{\cos(\frac{n+1}{2}t) \sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

En étudiant le signe et l'annulation de cette dérivée, on voit que le premier extremum de $S_n$ sur $[0, 2\pi]$ est atteint en $\frac{\pi}{n+1}$, et qu'il s'agit d'un minimum.

**Proposition 10.** On a
$$S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi - 2\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

*Démonstration.* On commence par obtenir une nouvelle expression pour $S_n'$. On remarque que
$$\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{1}{4i}\left(e^{i\frac{n+1}{2}t}+e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)\cdot\left(e^{i\frac{nt}{2}}-e^{-i\frac{nt}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4i}(e^{i(n+\frac{1}{2})t}-e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}-e^{-i(n+\frac{1}{2})t}) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right),$$
ce qui montre que pour $t\in]0,2\pi[$ on a
$$S_n'(t) = 1 - \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}.$$
On en déduit que
$$S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = S_n(0) + \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} S_n'(t)\mathrm{d}t = \pi + \frac{\pi}{n+1} - \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}\mathrm{d}t$$
$$= \pi + \frac{\pi}{n+1} - \int_0^{\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{n+1}} \frac{\sin(u)}{(n+\frac{1}{2})\sin(\frac{u}{2n+1})}\mathrm{d}u$$
(par changement de variable dans l'intégrale). Pour conclure la preuve, il reste donc à montrer que
$$\int_0^{\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{n+1}} \frac{\sin(u)}{(n+\frac{1}{2})\sin(\frac{u}{2n+1})}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Pour démontrer cela, on va appliquer le théorème de convergence dominée pour les fonctions $f_n$ définies sur $[0,\pi]$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{(n+\frac{1}{2})\sin(\frac{x}{2n+1})} & \text{si } x \leq \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{n+1}\,; \\ 0 & \text{si } x > \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{n+1}. \end{cases}$$
Puisque
$$\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$$
(et en remarquant que $\sin(\pi)=0$), on voit cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction $x\mapsto 2\frac{\sin(x)}{x}$. D'autre part, d'après le même résultat de convergence, si $y$ est suffisamment petit on a $\sin(y)\geq\frac{y}{2}$. Donc si $n$ est assez grand on a
$$f_n(x) \leq 4\frac{\sin(x)}{x}$$
pour tout $x\in[0,\pi]$. La fonction $x\mapsto 4\frac{\sin(x)}{x}$ est intégrable sur $[0,\pi]$, ce qui justifie l'application du théorème de convergence dominée et conclut la preuve. $\square$

On observe donc que
$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x - \pi,$$

et le réel de droite est strictement positif ($\simeq 0,56$). En d'autres termes, aussi grand soit $n$, la fonction $S_n$ approxime mal la fonction $f$ près de 0.

**Remarque 12.** Pour une autre illustration du phénomène de Gibbs, on pourra consulter [Go, Chap. 4, §5.5, Exercice 6, p. 277] ou [PRTGDLC, Exercice 40]. Pour une illustration "grand public", on pourra consulter `https://images.math.cnrs.fr/Le-phenomene-de-Gibbs.html`.

## 10. Exercices

**Exercice 1.** (1) Soit $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. Montrer que $f$ appartient à $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ si et seulement si
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < +\infty.$$
(*Indication* : on pourra utiliser le fait que $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ est complet.)

(2) (Variante de la question précédente) Montrer que l'application envoyant $f$ sur la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une isométrie d'espaces de Hilbert[8] de $\mathrm{L}^2_{2\pi}$ vers l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de complexes telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty$.

Référence : [QZ, Théorème V.1, p. 98].

**Exercice 2.** (1) Soit $k \geq 0$. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\lim_{|n|\to+\infty} n^k c_n(f) = 0$. (*Indication* : on pourra utiliser la Proposition 4.)

(2) Soit $k \geq 0$. Montrer que si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $c_n(f) = \mathrm{O}_{|n|\to+\infty}(1/n^{k+2})$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$. (*Indication* : on pourra utiliser les critères de régularité d'une limite de série de fonction.)

(3) En déduire que si $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si pour tout $k \geq 0$, $\lim_{|n|\to+\infty} n^k c_n(f) = 0$.

(4) Montrer que l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définit une bijection de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-périodiques de classe $\mathcal{C}^\infty$ vers l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $k \geq 0$, $\lim_{|n|\to+\infty} n^k a_n = 0$.

Référence : [QZ, Théorème V.1, p. 98].

**Exercice 3** (Séries de Fourier pour les fonctions réelles)**.** Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathrm{L}^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des classes de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-périodiques et telles que
$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \mathrm{d}t < +\infty.$$
Cet espace est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par
$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$
Dans le cas particulier $p = 2$, $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

8. C'est-à-dire une application linéaire bijective qui préserve les produits vectoriels (ou, de façon équivalente, les normes associées).

Pour $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on pose

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que pour $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, en voyant $f$ dans $\mathrm{L}^1_{2\pi}$ on a

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) & \text{si } n \geq 0\,; \\ \frac{1}{2}(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)) & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

En déduire que pour $n \geq 0$ on a

$$c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que la famille constituée de la fonction constante égale à 1, des fonctions $t \mapsto \sqrt{2}\cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et des fonctions $t \mapsto \sqrt{2}\sin(nt)$ pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, forme une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(3) Montrer que pour tout $f \in \mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, la série de fonctions

$$x \mapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big)$$

converge vers $f$ dans $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, et que de plus on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\mathrm{d}t = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\big(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\big).$$

(4) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $2\pi$-périodique, alors $f$ est paire si et seulement si $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. (*Indication* : on pourra calculer les coefficients de Fourier de la fonction $t \mapsto f(t) - f(-t)$.)

Référence : [Go, Chap. 4, §5].

**Exercice 4.** Calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \cos(mx)$ $(m \in \mathbb{Z})$ ;

(2) $x \mapsto \sin(mx)$ $(m \in \mathbb{Z})$ ;

(3) la fonction $2\pi$-périodique valant 1 sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, et 0 sur $[-\pi, \pi] \smallsetminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ $(\varepsilon \in ]0, \pi[)$ ;

(4) la fonction $2\pi$-périodique valant $1 - \frac{|t|}{\varepsilon}$ si $|t| \leq \varepsilon$ et 0 sur le reste de $[-\pi, \pi]$ $(\varepsilon \in ]0, \pi[)$.

Référence : [QZ, Chap. IV, §IV].

**Exercice 5.** (1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-périodique telle que

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \quad \text{pour } x \in [-\pi, \pi].$$

(2) En déduire les égalités suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Référence : [Go, Chap. 4, §5.5, Exercice 1, p. 272]. Pour d'autres calculs de sommes de séries du même genre, voir [FGN1, Ex. 4.8].

**Exercice 6.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

(1) Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue $2\pi$-périodique on a
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(2\pi\alpha k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$
(*Indication* : on pourra commencer par vérifier cette propriété quand $f = e_m$ pour un $m \in \mathbb{Z}$.)

(2) En déduire que $\{n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Référence : [Go, Chap. 4, §6, Problème 26].

**Exercice 7.** Soient $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Justifier l'existence de l'intégrale
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((m + 1/2)x\big)}{\sin(x/2)} \cdot \frac{\sin\big((n + 1/2)x\big)}{\sin(x/2)}\mathrm{d}t$$
et la calculer. (*Indication* : on pourra reconnaître le noyau de Dirichlet...)

Référence : [FGN1, Ex. 4.1].

**Exercice 8.** L'objectif de cet exercice est de montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue $2\pi$-périodique et si $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ est tel que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \{-n + 1, \dots, n - 1\}$, alors $f$ admet au moins $2n$ zéros dans $[0, 2\pi[$.

On fixe donc une telle fonction $f$, et on suppose par l'absurde qu'elle s'annule strictement moins de $2n$ fois sur $[0, 2\pi[$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les valeurs en lesquelles elle s'annule en changeant de signe.

(1) Montrer que $r$ est pair.

(2) On fixe $C \in \mathbb{C}$ et on pose
$$P(X) = C \prod_{k=1}^{r} (X - e^{i\alpha_k}), \quad g(x) = e^{-i(r/2)x} P(e^{ix}).$$
Montrer qu'on peut choisir $C$ tel que $g$ soit à valeurs réelles.

(3) Montrer que $g$ s'annule en changeant de signe en chaque $\alpha_k$, et qu'elle n'a pas d'autre zéro sur $[0, 2\pi[$. (*Indication* : on pourra considérer la dérivée de $g$.)

(4) Montrer que $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, et conclure.

Référence : [FGN1, Ex. 4.4].

**Exercice 9** (Analycité via le comportement des coefficients de Fourier)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ et $C > 0$ tels que
$$|c_n(f)| \leq C \exp(-\lambda|n|)$$
pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Le but de l'exercice est de montrer que $f$ est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

On fixe donc $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $e^{inx} = e^{inx_0} \sum_{k\geq 0} \frac{(in)^k (x-x_0)^k}{k!}$.

(2) Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on pose $a_{n,k} = c_n(f)e^{inx_0}\frac{(in)^k(x-x_0)^k}{k!}$. Montrer que si $|x - x_0| < \lambda$ on a
$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}} |a_{n,k}| < \infty.$$

(3) En déduire que si $|x - x_0| < \lambda$ on a
$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \cdot \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^k c_n(f) e^{inx_0} \right) \cdot (x - x_0)^k.$$

Référence : [FGN1, Ex. 4.24].

## 11. Quelques extraits de sujets faisant appel aux séries de Fourier

11.1. **AP20, partie I, question 3.** Si $f$ est une fonction localement intégrable 1-périodique, ses coefficients de Fourier sont définis par
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}\mathrm{d}t,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f),$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$
La série de Fourier associée à $f$ est la série trigonométrique
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{i2\pi nx} = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(2\pi nx) + b_n(f)\sin(2\pi nx)).$$

(1) Déterminer les coefficients de Fourier $a_n$ et $b_n$ de la fonction 1-périodique
$$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}.$$
(Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$.)

(2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi nx)}{-\pi n}$ converge simplement vers $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$.

11.2. **Sujet docteurs 2017, Problème 2, Partie I.A, question 1.** Soit $f$ une fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $k$ dans $\mathbb{Z}$, soit $c_k(f)$ le coefficient de Fourier d'indice $k$ de $f$ :
$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2ik\pi t}\mathrm{d}t.$$
On suppose que
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty.$$
Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{2ik\pi x}.$$
*Indication : on justifiera que la fonction figurant au second membre de l'égalité est* 1-*périodique et continue, puis on en calculera les coefficients de Fourier* 1-*périodiques.*

11.3. **AP16, Partie I, Questions 7–8.**

(1) Montrer que [9]

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

(2) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique, telle que

$$f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4} \quad \text{pour } t \in ]-\pi, \pi].$$

Déterminer la série de Fourier de $f$ et étudier sa convergence.

(3) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}.$$

11.4. **AP12, Partie III, Questions 2–8.** On rappelle que si $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels normés, on dit qu'une application $f : A \subset E \to F$ est *compacte* si pour tout ensemble borné $B \subset A$, $f(B)$ est un compact de $F$. Autrement dit, de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $A$ on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $F$.

On désigne par $\mathscr{C}^0_\#$ l'espace des fonctions continues 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. À une fonction $f \in \mathscr{C}^0_\#$ on associe la suite des coefficients de Fourier

$$\hat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi nx} f(x)\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Soit $a > 0$. Pour $f \in \mathscr{C}^0_\#$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$T[f](x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi nx}}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \hat{f}(n).$$

(1) Montrer que $f \mapsto T[f]$ définit un endomorphisme continu de $\mathscr{C}^0_\#$.

(2) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$T[f](x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

où, $J$ étant une constante positive qu'on déterminera, la fonction $k$ est définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par

$$k(x) = \frac{1}{2a}\big(e^{-a|x|} + J\mathrm{ch}(ax)\big)$$

et est prolongée sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

(3) En déduire que $T$ est un opérateur fortement positif au sens où si $f \in \mathscr{C}^0_\#$, non identiquement nulle, vérifie $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $T[f](x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

(4) Montrer que $T$ est un opérateur compact de $\mathscr{C}^0_\#$ dans lui-même.

---

9. Indication (non donnée dans le sujet) : on pourra utiliser le théorème d'interversion somme-intégrale de Lebesgue, qui affirme que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré complet et si $(f_n)$ est une suite de fonctions à valeurs complexes mesurables telle que $\sum_{n\geq 0}\int_X |f_n|\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable telle que $\int_X(\sum_{n\geq 0} f_n)\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 0}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$ ; voir [BP, Théorème 8.4].

(5) (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ ; montrer que si $f \in \mathscr{C}^0_\# \setminus \{0\}$ vérifie $T[f](x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = \hat{k}(n)$.

(b) Montrer que $\hat{k}(0) = \frac{1}{a^2}$ est l'unique valeur propre de $T$ de module maximal, caractériser l'espace propre associé et calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathscr{C}^0_\#)}$. (Ici, $\mathcal{L}(\mathscr{C}^0_\#)$ désigne l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de $\mathscr{C}^0_\#$ dans lui-même.)

(6) On pose

$$V = \{g \in \mathscr{C}^0_\# \mid \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\mathrm{d}t = 0\}.$$

Montrer que $V$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^0_\#$ tel que $T[V] \subset V$.

(7) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{C}^0_\#$ n'appartenant pas à $V$ et $x \in \mathbb{R}$, $T^n[f](x)$ est équivalent à $\frac{1}{a^{2n}}\hat{f}(0)$ quand $n \to +\infty$.

## Références

[BP] M. Briane, G. Pagès, *Analyse. Théorie de l'intégration*, 7ème édition, De Boeck, 2018.

[EA] M. El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Ellipses, 2008.

[FGN1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS – Analyse 2*, Cassini, 2009.

[FGN2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS – Analyse 4*, Cassini, 2012.

[Go] X. Gourdon, *Les maths en tête, Analyse, 3ème édition*, Ellipses, 2020.

[PRTGDLC] M. Peronnier, D. Roussillat, K. Tagliaro, J. Germoni, L. Decourt, T. Lahcene, P. Caldero, *Carnet de voyage en Analystan*, disponible sur `http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article974`.

[QZ] H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation, 3ème édition*, Dunod, 2008.

[Ru] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3ème édition, Dunod, 1998.

[Sk] G. Skandalis, *Topologie et analyse, 3e année*, Dunod, 2004.