

Applications linéaires – Réduction des endomorphismes

[Cette fiche a été adaptée par Simon Riche d'une fiche préparée précédemment par Richard Griffon, elle-même adaptée d'une fiche précédente de Nicolas Billerey.]

1 Programme de l'agrégation interne concernant l'algèbre linéaire

5.1 Espaces vectoriels et algèbres

Définitions. Applications linéaires. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. Algèbre $\mathcal{L}(E)$. Groupe linéaire $GL(E)$.

Espace produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels. Espaces vectoriels quotients.

Image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires. Projecteurs. Endomorphismes involutifs.

Familles libres, génératrices, bases.

Étant donné u de $\mathcal{L}(E, F)$, isomorphisme entre $\text{Im}(u)$ et tout supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, isomorphisme entre $\text{Im}(u)$ et $E/\text{Ker}(u)$.

Dans la suite, les espaces vectoriels sont tous supposés de dimension finie.

5.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Théorèmes de la dimension, de la base incomplète. Dimension d'un sous-espace. Dimension du quotient E/F lorsque F est un sous-espace vectoriel de E . Rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires.

Formule liant les dimensions de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Caractérisation des automorphismes.

5.3 Matrices

Espaces $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K . Isomorphisme canonique avec $\mathcal{L}(K^q, K^p)$. Produit matriciel. Matrices inversibles. Groupe $GL(n, K)$.

Matrice d'une application linéaire entre espaces vectoriels munis de bases. Matrice de passage. Rang d'une matrice. Matrices équivalentes et caractérisation par le rang. Taille maximale des sous-matrices carrées inversibles d'une matrice donnée. Transposée d'une matrice. Rang de la transposée.

Matrice d'un endomorphisme d'un espace muni d'une base, matrices semblables. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

5.4 Systèmes d'équations linéaires et opérations élémentaires

Systèmes d'équations linéaires, matrice associée. Systèmes de Cramer. Applications à des problèmes de géométrie. Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.

Application des opérations élémentaires à la résolution de systèmes linéaires, au calcul du rang et à l'inversion de matrices (méthode du pivot de Gauss).

Applications linéaires associées aux opérations élémentaires : dilatations et transvections. Génération de $GL(n, K)$ et $SL(n, K)$.

5.5 Déterminants

Dimension de l'espace des formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n .

Déterminant d'une famille de n vecteurs relativement à une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'une composée d'endomorphismes. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.

Mineurs, cofacteurs, développement relativement à une ligne ou une colonne. Calcul par opérations élémentaires.

Comatrice. Formules de Cramer. Orientation d'un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie. Exemples de calcul de volumes.

Groupes $SL(E)$ et $SL(n, K)$.

5.6 Dualité

Formes linéaires et hyperplans. Équations d'un hyperplan. Dual E^* d'un espace vectoriel E . Base duale d'une base. Application aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Bijection, à l'aide de l'orthogonalité, entre l'ensemble des sous-espaces de E et l'ensemble des sous-espaces de E^* . Orthogonal d'une somme ou d'une intersection de deux sous-espaces. Dimension de l'orthogonal.

Transposée d'une application linéaire. Rang de la transposée.

5.7 Réduction des endomorphismes

Sous-espaces stables par un endomorphisme. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ; endomorphismes diagonalisables.

Algèbre $K[u]$ des endomorphismes polynomiaux en un endomorphisme u de E . Polynôme annulateur, polynôme minimal. Décomposition des noyaux.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Triangulation d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, lorsque le polynôme caractéristique est scindé. Ordre de multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé. Sous-espaces caractéristiques. Théorème de Cayley–Hamilton.

Critères de diagonalisabilité : la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée ; il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Diagonalisation simultanée d'un ensemble d'endomorphismes diagonalisables commutant entre eux.

Diagonalisation par blocs. Décomposition de Dunford : lorsque le polynôme caractéristique est scindé, existence et unicité de l'écriture $u = d + n$ où d est diagonalisable et n nilpotent avec $d \circ n = n \circ d$.

Application de la réduction des endomorphismes à l'analyse (suites récurrentes linéaires, systèmes différentiels linéaires, etc.).

5.8 Cas où le corps K est \mathbf{R} ou \mathbf{C}

Application du théorème d'équivalence des normes en dimension finie à la topologie de $\mathcal{L}(E)$.

Définition de $\exp(u)$, application aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Exemples de parties denses de $\mathcal{L}(E)$: $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$; si $K = \mathbf{C}$, l'ensemble des endomorphismes diagonalisables est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

5.9 Formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques. Morphisme de E vers E^* canoniquement associé à une forme bilinéaire. Matrice relativement à une base. Matrices congruentes.

Bases orthogonales. Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Loi d'inertie et signature dans le cas réel.

Application aux coniques et quadriques. Application à l'analyse des données.

2 Applications linéaires

Dans tout le document, \mathbb{K} désigne un corps (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Définition 1. Si E et F sont deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} , une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est une application de E vers F telle que pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Dans le cas où $E = F$, une application linéaire de E dans E est appelée un *endomorphisme* de E . Une application linéaire bijective est appelée un *isomorphisme*.

Rappelons que :

1. Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors son noyau

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E , et son image

$$\operatorname{im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$$

est un sous-espace vectoriel de F .

2. Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire et si $V \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors l'application $f|_V : V \rightarrow F$ définie par $(f|_V)(x) = f(x)$ pour $x \in V$ est linéaire.

3. Si $f, g : E \rightarrow F$ sont des applications linéaires et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors l'application $\lambda f + \mu g : E \rightarrow F$ définie par

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

pour $x \in E$ est également une application linéaire. Cette structure définit une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F .

4. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications linéaires, alors la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est également une application linéaire. La composition des applications linéaires est bilinéaire; en particulier, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ admet une structure naturelle de \mathbb{K} -algèbre.

5. Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors la bijection réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est également linéaire. En particulier, le sous-ensemble $\text{GL}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ formé des applications linéaires bijectives a une structure naturelle de groupe (pour la composition).

Théorème 2 (Théorème du rang). Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} , et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a

$$\dim(\text{im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)).$$

[Preuve : L'idée de la preuve est de montrer que si $V \subset E$ est un sous-espace qui est un supplémentaire de $\ker(f)$ (c'est-à-dire que $E = V \oplus \ker(f)$), alors f se restreint en un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$. Si on est plus savant, on peut dire que f se factorise en un isomorphisme $E/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$.]

Corollaire 3. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} , et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injective;
- (ii) f est surjective;
- (iii) f est un isomorphisme.

Exercice 1. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications linéaires. Montrer qu'on a

$$\ker(f) \subset \ker(g \circ f), \quad \text{im}(g \circ f) \subset \text{im}(g).$$

Exercice 2. Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $V \subset E$ un sous-espace vectoriel, et soit $\pi : E \rightarrow E/V$ l'application canonique. Montrer que si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une application linéaire $g : E/V \rightarrow F$ telle que $f = g \circ \pi$;
2. $V \subset \ker(f)$;
3. $f|_V$ est l'application nulle.

Montrer également que si ces conditions sont satisfaites, l'application g du point (1) est unique.

3 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} , et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$ de E , et une base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_s)$ de F . La matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$ de u dans ces bases est la matrice $(a_{i,j} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r)$ déterminée par les égalités suivantes :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^s a_{i,j} f_i.$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation en posant $M_{\mathcal{B}}(u) := M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$.

Exemple 4. Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases d'un même espace vectoriel E de dimension finie, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' est définie par $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

Théorème 5. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} , de dimensions respectives r et s , soit \mathcal{B} une base de E , et soit \mathcal{B}' une base de F . Alors l'application $f \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathcal{L}(E, F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K}).$$

Exemple 6. Dans le cas où $E = \mathbb{K}^r$ et $F = \mathbb{K}^s$ sont munis de leurs bases canoniques, le Théorème 5 identifie l'espace des applications linéaires de \mathbb{K}^r vers \mathbb{K}^s à l'espace des matrices de taille (s, r) . La bijection réciproque envoie une matrice A sur l'application linéaire donnée par $v \mapsto A \cdot v$, où les éléments de \mathbb{K}^r et \mathbb{K}^s sont écrits comme des vecteurs colonne. (Cette application linéaire est appelée l'endomorphisme associé à A .)

Proposition 7. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} , et soient $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ des applications linéaires. Soient également $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F et G respectivement. Alors on a

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \cdot M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u).$$

Un cas particulier important de cette formule est le suivant. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} et u un endomorphisme de E . Soient également \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Alors on a

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(u) \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}. \quad (1)$$

Parmi les conséquences de cette formule on peut citer les propriétés suivantes.

1. Dans le cadre du Théorème 5, dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, l'isomorphisme $\mathcal{L}(E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ donné par $u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres.
2. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{K} , et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) f est un isomorphisme ;
 - (b) pour toutes bases \mathcal{B} de E et \mathcal{B}' de F , la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible ;
 - (c) il existe une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{B}' de F telles que la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

Rappelons qu'à toute matrice $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ on peut associer son déterminant $\det(A)$, et qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. La formule (1) permet d'étendre cette définition aux endomorphismes. Plus précisément, si E est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors cette formule (combinée avec la multiplicativité du déterminant) montre que le scalaire $\det(M_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} de E ; ce scalaire est appelé le déterminant de u , et noté $\det(u)$. Comme pour les matrices, on obtient que u est un isomorphisme si et seulement si $\det(u)$ est non nul.

Le même commentaire permet de définir la trace $\text{tr}(u)$ d'un endomorphisme u de E .

Exercice 3. Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases de E et F respectivement, et soient \mathcal{B}_E^* et \mathcal{B}_F^* les bases duales (de E^* et F^*). La transposée de u est l'application ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$ définie par $\varphi \mapsto \varphi \circ u$. Exprimer $M_{\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*}({}^t u)$ en termes de $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$.

4 Sous-espaces vectoriels stables

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

Définition 8. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u lorsque $u(F) \subset F$.

Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , la restriction de u à F induit un endomorphisme de F noté

$$u|_F : F \rightarrow F.$$

On fixe un supplémentaire G de F dans E (il en existe). Lorsqu'on concatène une base de F avec une base de G , on obtient une base de E . Dans toute base de cette forme, la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs, *i.e.* de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

où A_1 est carrée de taille $\dim(F)$, A_3 est carrée de taille $\dim(G)$, et A_2 est de taille $\dim(F) \times \dim(G)$. Ici, A_1 est la matrice de $u|_F$ dans la base choisie de F .

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier, soient $a, b \in \mathbb{K}$, et considérons la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ définie par

$$M_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i = j ; \\ b & \text{si } i + j = 2n + 1 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que \mathbb{K}^{2n} est somme directe de n sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par (l'endomorphisme associé à) M .

Exercice 5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent, c'est-à-dire que $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $\ker(u)$ et $\text{im}(u)$ sont stables par v .

5 Éléments propres

On continue avec E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et u un endomorphisme de E . Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose¹

$$E_\lambda := \ker(u - \lambda \cdot \text{id}_E).$$

L'ensemble E_λ est le plus grand sous-espace vectoriel de E sur lequel u agit comme l'homothétie de rapport λ . Notons que ce sous-espace est stable par u .

Définition 9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u si l'endomorphisme $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire si E_λ est un sous-espace vectoriel non nul de E . Dans ce cas, on appelle E_λ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ , et les éléments de $E_\lambda \setminus \{0\}$ sont appelés vecteurs propres de u associés à λ .

Exemple 10. On a $E_0 = \ker(u)$. Le scalaire 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injectif. Si E est de dimension finie, cette condition est vérifiée si et seulement si u n'est pas inversible (d'après le Corollaire 3).

1. Notons que le sous-espace E_λ dépend de u , même si on ne le fait pas apparaître dans la notation. En particulier, pour éviter les confusions, dans un contexte où on considère plusieurs endomorphismes à la fois il peut être utile de raffiner cette notation, en écrivant par exemple $E_\lambda(u)$ ou $E_{u,\lambda}$.

Lemme 11. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u . Alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

[Preuve : par récurrence sur $k \geq 1$.]

6 Polynôme caractéristique

On définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule

$$\chi_A(X) = \det(\underbrace{A - XI_n}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])}) \in \mathbb{K}[X].$$

Puisque le déterminant est invariant par conjugaison, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable² à A , on a $\chi_B(X) = \chi_A(X)$. Cela justifie la définition suivante.

Définition 12. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit le polynôme caractéristique de u , noté $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$, par la formule $\chi_u := \chi_A$ où A désigne la matrice de u dans une base quelconque de E .

Le polynôme caractéristique de u est de degré $n = \dim E$. On a

$$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(u) X^{n-1} + \dots + \det(u).$$

En particulier, u est un isomorphisme si et seulement si $\chi_u(0) \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda \text{id}_E)$. Au vu du Corollaire 3 et des commentaires de la partie 3, on en déduit l'énoncé suivant.

Lemme 13. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E , et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Ce lemme a deux conséquences importantes :

1. un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres ;
2. si \mathbb{K} est algébriquement clos (par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors tout endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie a une valeur propre.

Lemme 14. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u et qu'on note $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit, alors son polynôme caractéristique $\chi_{u|_F}$ divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$.

[Preuve : Utiliser la forme (2) de la matrice de u dans une base bien choisie.]

Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de u , on note $\beta_\lambda \in \mathbb{N}$ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de u : c'est le plus grand entier $b \geq 1$ tel que $(X - \lambda)^b$ divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$.

Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u , on a

$$\sum_{i=1}^r \beta_{\lambda_i} \leq \dim(E),$$

avec égalité si et seulement si χ_u est scindé sur \mathbb{K} .

2. Rappelons que deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* (ou *conjuguées*) s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Lemme 15. Pour toute valeur propre λ de u , on a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \beta_\lambda$.

[Preuve : Utiliser le Lemme 14 pour le sous-espace stable E_λ de u .]

Exercice 6. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\dim(E)$ est impair, tout endomorphisme de E admet une valeur propre.
2. Montrer que si $\dim(E)$ est pair, il existe un endomorphisme de E qui n'admet pas de valeur propre.

7 Diagonalisabilité

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Définition 16. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale, ou en d'autres termes s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u .

On dit de même qu'une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. En utilisant la formule (1) on démontre l'énoncé suivant.

Lemme 17. Les conditions suivantes ont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) pour toute base \mathcal{B} de E , la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable ;
- (iii) il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable.

Théorème 18 (1^{ère} CNS de diagonalisabilité). Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'endomorphisme u est diagonalisable ;
- (ii) on a $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$;
- (iii) on a $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_r}) = \dim E$;
- (iv) le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé et pour toute valeur propre λ de u on a $\dim(E_\lambda) = \beta_\lambda$.

Remarque 19. Pour appliquer le Théorème 18, il semble falloir connaître a priori la liste des valeurs propres de u . Mais ce n'est en fait pas nécessaire : si on dispose de scalaires distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_r} \geq \dim E$, alors nécessairement les valeurs propres de u sont les λ_i tels que $E_{\lambda_i} \neq 0$, et l'inégalité précédente est une égalité. (Cela découle du Lemme 11.)

Corollaire 20. Si u vérifie l'une des deux conditions (équivalentes) :

- son polynôme caractéristique χ_u est scindé à racines simples ;
 - l'endomorphisme u possède $\dim(E)$ valeurs propres deux à deux distinctes,
- alors u est diagonalisable.

Cette condition suffisante de diagonalisabilité n'est bien sûr pas nécessaire (considérer id_E si $\dim(E) \geq 2$).

Exemple 21. Tout projecteur est diagonalisable, avec valeurs propres 0 et 1. Si \mathbb{K} n'est pas de caractéristique 2, toute symétrie est diagonalisable, avec valeurs propres 1 et -1 .

Exercice 7. Montrer que si la caractéristique de \mathbb{K} n'est pas 2, la matrice de l'Exercice 4 est diagonalisable.

Exercice 8. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui n'est pas diagonalisable.

Exercice 9. Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à chacune des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables ? Distinguer selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Le cas échéant, donner une base de diagonalisation.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8 Codiagonalisation

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 22. On dit qu'une famille $(u_i : i \in I)$ d'endomorphismes de E est codiagonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que chaque matrice $M_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale, ou en d'autres termes une base de E formée de vecteurs propres pour chacun des u_i .

Théorème 23. Soit $(u_i : i \in I)$ une famille d'endomorphismes de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille $(u_i : i \in I)$ est codiagonalisable ;
- (ii) chaque endomorphisme u_i est diagonalisable, et de plus pour tous $i, j \in I$ on a $u_i \cdot u_j = u_j \circ u_i$.

[Preuve : Par récurrence sur $\dim(E)$, en considérant les sous-espaces propres pour un u_i qui n'est pas une homothétie.]

9 Polynômes d'endomorphismes

On fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

Pour tout entier $k \geq 1$, on note

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ facteurs}}.$$

On pose aussi $u^0 = \text{id}_E$. On considère l'application

$$\Phi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto P(u) \end{cases}$$

où $P(u) = a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot u + \cdots + a_d \cdot u^d \in \mathcal{L}(E)$ si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$. L'application Φ_u est l'unique morphisme de \mathbb{K} -algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui envoie X sur u . Remarquons que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(u) \circ Q(u) = \Phi(P \cdot Q) = \Phi(Q \cdot P) = Q(u) \circ P(u) \in \mathcal{L}(E)$.

Lemme 24. *Le morphisme Φ_u n'est pas injectif.*

[Preuve : $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, alors que $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie.]

Ainsi, le noyau de Φ_u est un idéal *non nul* de $\mathbb{K}[X]$: on l'appelle l'idéal d'annulation de u . Tout élément de $\ker(\Phi_u)$ est appelé un polynôme annulateur de u . Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal, la définition suivante a un sens.

Définition 25. *On appelle polynôme minimal de u , noté μ_u , l'unique générateur unitaire de $\ker(\Phi_u)$.*

En d'autres termes, le polynôme minimal de u est le polynôme unitaire de plus petit degré parmi les éléments non nuls de $\ker(\Phi_u)$.

Lemme 26. *Les polynômes χ_u et μ_u ont les mêmes racines dans \mathbb{K} . (D'après le Lemme 13, ces racines sont les valeurs propres de u).*

On s'intéresse à présent à l'image de Φ_u , notée $\mathbb{K}[u]$ et appelée algèbre des polynômes en u . Autrement dit,

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) : P \in \mathbb{K}[X]\} \subset \mathcal{L}(E).$$

D'après les commentaires ci-dessus, $\mathbb{K}[u]$ une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Par le premier théorème d'isomorphisme, il y a un isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_u)$. On en déduit en particulier le résultat suivant.

Lemme 27. *En tant que \mathbb{K} -espace vectoriel, on a $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\mu_u)$.*

On note que, si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par u , alors F est stable par tout élément de $\mathbb{K}[u]$; de plus, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(u)|_F = P(u)|_F$. On en déduit facilement la propriété suivante.

Lemme 28. *Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par u , alors $\mu_{u|_F}$ divise μ_u .*

Le théorème qui suit est fondamental et a de multiples applications.

Théorème 29 (Lemme des noyaux). *Soient $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. On note $P := P_1 P_2 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$ leur produit. Le sous-espace vectoriel $\ker(P(u))$ de E se décompose comme somme directe :*

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^k \ker(P_i(u)).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on note $\pi_i : \ker(P(u)) \rightarrow \ker(P_i(u)) \subset \ker(P(u))$ le projecteur sur $\ker P_i(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker(P_j(u))$. Alors π_i est un polynôme en u , autrement dit un élément de $\mathbb{K}[u]$.

[Preuve : Par récurrence sur k on se ramène au cas $k = 2$. Puis on utilise une relation de Bézout.]

Théorème 30 (2^{ème} CNS de diagonalisabilité). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.
- (iii) μ_u est scindé à racines simples.

[Preuve : Pour l'implication (i) \Rightarrow (ii), on considère le polynôme $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres (distinctes) de u . L'implication (ii) \Rightarrow (iii) découle du fait que tout diviseur non nul d'un polynôme scindé à racines simples est scindé à racines simples. Pour l'implication (iii) \Rightarrow (i), on applique le Théorème 29.]

D'après le Lemme 26, les racines de μ_u sont les valeurs propres de u . Si u est diagonalisable et si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont ses valeurs propres distinctes, alors on a donc

$$\mu_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i). \quad (3)$$

Corollaire 31. *Si u est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.*

[Preuve : Cela découle du Théorème 30, combiné avec le Lemme 28 et le fait que tout diviseur non nul d'un polynôme scindé à racines simples est lui-même scindé à racines simples.]

Exercice 10. *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie la relation $u^3 + 3u^2 - u = 3\text{id}_E$.*

1. *Quelles sont les valeurs propres possibles pour u ?*
2. *L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?*
3. *Justifier que u est inversible et déterminer son inverse.*

Exercice 11. *Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est diagonalisable ;*
2. *tout élément de $\mathbb{K}[u]$ est diagonalisable ;*
3. *la famille $\mathbb{K}[u]$ est codiagonalisable.*

10 Théorème de Cayley–Hamilton

On continue avec E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

Le résultat suivant est fondamental, et très utile.

Théorème 32 (Théorème de Cayley–Hamilton). *Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u . Autrement dit, $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul, ou encore μ_u divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$.*

Parmi les conséquences de ce théorème, on peut citer le fait que $\deg(\mu_u) \leq \dim(E)$, ou le point (1) du Lemme 39 ci-dessous.

L'exercice 13 ci-dessous propose une preuve du Théorème 32 dans le cas où \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} (qui peut s'adapter au cas d'un corps quelconque).

11 Trigonalisabilité

On continue avec E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

Définition 33. *On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.*

Notons que si u est diagonalisable alors u est trigonalisable ; autrement dit, la trigonalisabilité est une condition plus faible que la diagonalisabilité. Notons également que si \mathcal{B} est une base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure, alors les coefficients diagonaux de $M_{\mathcal{B}}(u)$ sont exactement les valeurs propres de u , et chaque valeur propre λ apparaît β_{λ} fois.

On dit de même qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. La preuve de l'énoncé suivant est similaire à celle du Lemme 34.

Lemme 34. Les conditions suivantes ont équivalentes :

- (i) u est trigonalisable ;
- (ii) pour toute base \mathcal{B} de E , la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable ;
- (iii) il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable.

Théorème 35 (1^{ère} CNS de trigonalisabilité). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est trigonalisable ;
- (ii) χ_u est scindé ;
- (iii) on a $\beta_{\lambda_1} + \dots + \beta_{\lambda_r} = \dim E$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ désignent les valeurs propres de u .

[Preuve : Le sens (i) \Rightarrow (ii) est facile, l'autre sens (ii) \Rightarrow (i) se démontre par récurrence sur $\dim(E)$. L'équivalence entre (ii) et (iii) est claire.]

Corollaire 36. Si \mathbb{K} est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

[Preuve : Comme \mathbb{K} est algébriquement clos, tout polynôme non nul est scindé.]

Corollaire 37. Si u est trigonalisable et F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ est trigonalisable.

[Preuve : Utiliser le Lemme 14 et le Théorème 35.]

Exercice 12. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. On considère une matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On définit $E_0 = \{0\}$ et pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{et} \quad A_k = (A - \lambda_1 I_n) \cdots (A - \lambda_k I_n),$$

où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{C}^n .

1. Justifier que pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $(A - \lambda_k I_n)(e_k) \in E_{k-1}$.
2. Montrer par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$ que $A_k(E_k) = \{0\}$. Que peut-on dire de A_n ?
3. En déduire que $\chi_A(A) = 0$ puis le théorème de Cayley–Hamilton pour les matrices à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

12 Endomorphismes nilpotents

On fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

Définition 38. On dit que u est nilpotent s'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $u^m = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier m vérifiant cette condition est appelé indice de nilpotence de u .

De même, une matrice est dite nilpotente si une de ses puissances est nulle.

Lemme 39. Supposons que u est nilpotent.

1. L'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à $\dim(E)$.
2. On a $\mu_u = X^k$, où k est l'indice de nilpotence de u .
3. u est trigonalisable. Plus précisément, il existe une base \mathcal{B} de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est strictement triangulaire supérieure.

[Preuve : Le point (1) découle du Théorème 32. Le point (2) découle directement des définitions. Le point (3) se démontre par récurrence sur $\dim(E)$, en remarquant qu'un endomorphisme nilpotent ne peut pas être injectif.]

Remarquons que le point (3) de ce lemme montre que $\chi_u = (-1)^n X^n$.

13 Sous-espaces caractéristiques

On continue avec E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

Pour toute valeur propre λ de u , on a vu au Lemme 26 que λ est racine de μ_u . Soit α_λ la multiplicité de λ comme racine de μ_u . Puisque μ_u divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$ (par le théorème de Cayley–Hamilton), on a $1 \leq \alpha_\lambda \leq \beta_\lambda$.

Définition 40. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . Le sous-espace caractéristique associé à λ est défini par $F_\lambda = \ker((u - \lambda \cdot \text{id}_E)^{\alpha_\lambda})$.

Le sous-espace caractéristique F_λ contient le sous-espace propre E_λ associé à λ et il est stable par u .

Proposition 41. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u , et n un entier ≥ 1 .

1. Si $n < \alpha_\lambda$ on a $\ker((u - \lambda \cdot \text{id}_E)^n) \subsetneq F_\lambda$.
2. Si $n \geq \alpha_\lambda$ on a $F_\lambda = \ker((u - \lambda \cdot \text{id}_E)^n)$.
3. On a $\beta_\lambda = \dim(F_\lambda)$.

[Preuve : On écrit $\mu_u = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \cdot Q$ où λ n'est pas une racine de Q . Alors d'après le Théorème 29 on a $E = F_\lambda \oplus \ker(Q(u))$, et chacun de ces sous-espaces est stable par u . Pour (1) on raisonne par l'absurde ; si on avait l'égalité alors $(X - \lambda)^n \cdot Q$ serait un polynôme annulateur de u . Pour (2), en utilisant une relation de Bézout entre $(X - \lambda)^n$ et Q on vérifie que $((u - \lambda \cdot \text{id}_E)^n)|_{\ker(Q(u))}$ est injectif, et bien sûr on a $((u - \lambda \cdot \text{id}_E)^n)|_{F_\lambda} = 0$, ce qui implique le résultat. Pour (3) on remarque que $\chi_u = \chi_{u|_{F_\lambda}} \cdot \chi_{u|_{\ker(Q(u))}}$, puis que $\chi_{u|_{F_\lambda}} = (\lambda - X)^{\dim(F_\lambda)}$ et que λ n'est pas une racine de $\chi_{u|_{\ker(Q(u))}}$.]

En utilisant ce lemme on peut vérifier que F_λ est le plus grand sous-espace vectoriel de E stable par u sur lequel $u - \lambda \cdot \text{id}_E$ est nilpotent.

Théorème 42 (2^{ème} CNS de trigonalisabilité). Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est trigonalisable ;
- (ii) on a $E = F_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus F_{\lambda_r}$;
- (iii) il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé tel que $P(u) = 0$.
- (iv) μ_u est scindé.

[Preuve : Il est clair que (iv) \Rightarrow (iii), et l'implication (iii) \Rightarrow (iv) découle du fait qu'un diviseur d'un polynôme scindé est nécessairement scindé. L'implication (iv) \Rightarrow (ii) découle du Théorème 29. L'implication (ii) \Rightarrow (i) se déduit du point (3) du Lemme 39. Enfin, l'implication (i) \Rightarrow (iii) découle du Théorème 35 combiné au Théorème de Cayley–Hamilton.]

Théorème 43 (3^{ème} CNS de diagonalisabilité). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ de u , on a $E_\lambda = F_\lambda$.

[Preuve : L'implication (i) \Rightarrow (ii) découle de la formule (3). Pour l'implication (ii) \Rightarrow (i), on utilise les Théorèmes 18 et 42.]

14 Décomposition de Dunford

On continue avec E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

Théorème 44 (Décomposition de Dunford). *Supposons que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que :*

1. $u = d + n$;
2. d est diagonalisable et n est nilpotent ;
3. d et n commutent, i.e. $d \circ n = n \circ d$.

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Cet énoncé admet également une version matricielle, comme suit.

Théorème 45 (Décomposition de Dunford, version matricielle). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et supposons que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique couple (D, N) de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :*

1. $A = D + N$;
2. D est diagonalisable et N est nilpotente ;
3. D et N commutent, i.e. $D \cdot N = N \cdot D$.

De plus, D et N sont des polynômes en A .

La décomposition $u = d + n$ de Théorème 44 ou la décomposition $A = D + N$ du Théorème 45 s'appellent la décomposition de Dunford de u ou de A . Les démonstrations des Théorèmes 29 et 44 suggèrent la méthode suivante pour le calcul de la décomposition de Dunford d'un endomorphisme u .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u . Par hypothèse, χ_u s'écrit $\chi_u = P_1^{\beta_1} \dots P_r^{\beta_r}$ avec $P_i = \lambda_i - X$, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Les polynômes $P_1^{\beta_1}, \dots, P_r^{\beta_r}$ sont deux à deux premiers entre eux, de sorte que les polynômes $\left\{ Q_i := \prod_{j \neq i} P_j^{\beta_j} \right\}_{1 \leq i \leq r}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun facteur commun à tous les Q_i). Par le théorème de Bézout, il existe donc $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U_1 Q_1 + \dots + U_r Q_r = 1.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, le projecteur $\pi_i : E \rightarrow \ker P_i^{\beta_i}(u)$ est donné par $\pi_i = (U_i Q_i)(u)$. On en déduit une description « explicite » de d et n :

$$d := \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i (U_i Q_i)(u) \quad \text{et} \quad n := u - d.$$

Dans la pratique, les polynômes Q_1, \dots, Q_r s'obtiennent à partir de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $1/\chi_u$: il existe des éléments $c_{1,1}, \dots, c_{1,\beta_1}, \dots, c_{r,1}, \dots, c_{r,\beta_r} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\frac{1}{\chi_u} = \frac{1}{(\lambda_1 - X)^{\beta_1} \dots (\lambda_r - X)^{\beta_r}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{c_{i,j}}{(\lambda_i - X)^j},$$

ou encore

$$1 = \sum_{i=1}^r \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\beta_i} c_{i,j} (\lambda_i - X)^{\beta_i - j} \right)}_{=: U_i} Q_i.$$

La décomposition de Dunford est en particulier utile au calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme. En effet, comme d et n commutent, on en déduit que l'on a

$$\exp(u) = \exp(d + n) = \exp(d) \circ \exp(n).$$

Or pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$d^k = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i \right)^k = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k \pi_i,$$

car $\pi^k = \pi$ pour tout projecteur π et tout entier $k \geq 1$. Ainsi, il vient

$$\exp(d) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i} \pi_i \quad \text{et} \quad \exp(n) = \text{id}_E + n + \cdots + \frac{n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!},$$

où $\alpha \geq 1$ désigne l'indice de nilpotence de n .

Remarque 46. La décomposition de Dunford d'un endomorphisme peut également se décrire de la façon suivante et termes de ses sous-espaces caractéristiques. Puisqu'on suppose que χ_u est scindé, u est diagonalisable par le Théorème 35, de sorte qu'on a la décomposition $E = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r}$ du Théorème 42. Alors d est l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque F_{λ_i} est $\lambda_i \cdot \text{id}_{F_{\lambda_i}}$, et n est l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque F_{λ_i} est $u|_{F_{\lambda_i}} - \lambda_i \cdot \text{id}_{F_{\lambda_i}}$.

Remarque 47. Une erreur classique consiste à croire que la décomposition de Dunford d'une matrice triangulaire supérieure est donnée par la somme de sa partie diagonale et de sa partie strictement triangulaire supérieure. Ce n'est pas le cas, puisque qu'en général ces matrices ne commutent pas. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ est diagonalisable d'après le Corollaire 20; sa décomposition de Dunford est donc } A = A + 0.$$

Exercice 14. Déterminer la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

En déduire l'expression de $\exp(A)$.

15 Applications de la réduction des endomorphismes

15.1 Suites récurrentes linéaires

Dans cette partie on suppose que \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ fixés. On s'intéresse dans ce paragraphe à l'espace vectoriel E constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{K} vérifiant la relation de récurrence d'ordre p

$$u_{n+p} = a_0 u_n + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}, \quad \text{pour tout } n \geq 0. \quad (4)$$

L'espace vectoriel E est un sous-espace du \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formé de toutes les suites à valeurs dans \mathbb{K} (qui est de dimension infinie). L'espace E est de dimension p : on constate en effet que l'application ψ qui, à une suite $(u_n)_{n \geq 0} \in E$ associe le p -uplet $(u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ de ses p premières valeurs, est un isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{K} et pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p.$$

On a alors $u \in E$ si et seulement si $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \geq 0$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Autrement dit, $u \in E$ si et seulement si pour tout entier $n \geq 0$, on a $U_n = A^n U_0$.

Définition 48. *Le polynôme*

$$P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1X - a_0 \in \mathbb{K}[X].$$

s'appelle le polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence (4).

On pourrait vérifier (par récurrence sur $\deg(P) = p$) que le polynôme caractéristique de la matrice A ci-dessus vaut

$$\chi_A = (-1)^p P,$$

de sorte que les puissances successives de A peuvent être calculées à partir de cette relation et du théorème de Cayley–Hamilton. La matrice A (ou sa transposée) s'appelle la matrice compagnon du polynôme (unitaire) P . On peut vérifier qu'on a aussi $\mu_A = P$ où μ_A désigne le polynôme minimal de A .

Voyons comment, dans la pratique, on peut déterminer l'espace E (en explicitant une base). Pour ce faire, considérons l'endomorphisme $\tau : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (appelé opérateur de décalage) qui, à une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \geq 1}$. Par définition, l'endomorphisme $P(\tau) : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est donné par

$$(u_n)_{n \geq 0} \mapsto (u_{n+p} - a_{p-1}u_{n+p-1} - \dots - a_0u_n)_{n \geq 0}.$$

On a donc $E = \ker P(\tau)$. En particulier, E est stable par τ . Dans ce qui suit, on note encore $\tau : E \rightarrow E$ l'endomorphisme restreint (que l'on devrait noter $\tau|_E$).

On suppose à présent que le polynôme P est scindé (c'est toujours le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par exemple) et qu'il ne s'annule pas en 0, *i.e.* que $a_0 \neq 0$ (quitte à faire un changement d'indice, on peut toujours se ramener à ce cas-là). On écrit

$$P = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r},$$

où $r \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des éléments distincts (non nuls) de \mathbb{K} et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des entiers strictement positifs. Par le Théorème 29, on a alors

$$E = \ker P(\tau) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(\tau - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}. \quad (5)$$

Remarque 49. Avec les notations précédentes, on a $\chi_\tau = \chi_A = (-1)^p P$ et $\mu_\tau = \mu_A = P$, de sorte que (5) est en fait la décomposition de E en sous-espaces caractéristiques associés à τ .

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on pose $F_i = \ker(\tau - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$ et on vérifie (par récurrence sur α_i) que la famille

$$\mathcal{F}_i := ((\lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n \lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n^2 \lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{\alpha_i-1} \lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

est contenue dans F_i . On vérifie facilement que cette famille est aussi libre. En concaténant les familles $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_r$, on construit une famille \mathcal{F} de vecteurs de E : cette famille \mathcal{F} est libre d'après la décomposition 5 et contient $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = p = \dim(E)$ vecteurs. C'est donc une base de E .

Remarque 50. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le polynôme P n'est plus nécessairement scindé, de sorte que la méthode ci-dessus ne s'applique pas nécessairement. Mais on peut la raffiner de la façon suivante. Le polynôme P est scindé sur \mathbb{C} . Pour chaque racine réelle de P , on procède comme ci-dessus. Et, pour un couple $(\lambda, \bar{\lambda})$ de racines complexes non réelles conjuguées de multiplicité α , en prenant les parties réelles et imaginaires des solutions complexes, on obtient deux familles de solutions réelles indépendantes

$$\{(n^j \rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}} : 0 \leq j \leq \alpha - 1\} \quad \text{et} \quad \{(n^j \rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}} : 0 \leq j \leq \alpha - 1\},$$

où l'on a posé $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$. Ceci permet de construire une base de E .

Exercice 15. Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrentes linéaires d'ordre 2 suivantes, donner l'expression du terme général.

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci) ;
2. $u_0 = -1, u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
3. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

15.2 Systèmes différentiels linéaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans ce paragraphe, on identifie les vecteurs de \mathbb{R}^n à des matrices colonnes à n lignes.

On s'intéresse au \mathbb{R} -espace vectoriel E constitué des solutions $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

$$Y' = AY. \tag{6}$$

On pose $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application $t \mapsto \exp(-tA)Y$. On constate que Y est solution de (6) si et seulement si Z est dérivable et $Z' = 0$. On en déduit que

$$E = \{t \mapsto \exp(tA)Y_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

est un espace vectoriel de dimension n . Une base de E est donnée par les vecteurs colonnes de la matrice $\exp(tA)$ (en prenant Y_0 qui parcourt les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n).

Cette méthode permet de résoudre théoriquement l'équation, mais elle nécessite de savoir calculer $\exp(tA)$, ce qui peut être compliqué en pratique. Voyons comment, dans la pratique, on peut déterminer plus explicitement une base de E . Le polynôme χ_A n'est pas nécessairement scindé dans $\mathbb{R}[X]$, mais il l'est dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le Théorème 45, il existe un unique couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que

1. $A = D + N$;
2. D est diagonalisable et N est nilpotente ;
3. D et N commutent, i.e. $DN = ND$.

La matrice A est réelle, de sorte que

$$D + N = A = \overline{A} = \overline{D} + \overline{N}.$$

Par unicité de la décomposition de Dunford, il vient $\overline{D} = D$ et $\overline{N} = N$, *i.e.* D et N sont également des matrices réelles. (Attention cependant au fait que D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas nécessairement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit alors que D , vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est une matrice semi-simple).

La méthode présentée dans la partie 14 permet enfin de calculer la matrice $\exp(tA)$ et donc de déterminer l'espace E . Plus explicitement, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A . Notons respectivement

$$\chi_A = \prod_{j=1}^r (\lambda_j - X)^{\beta_j} \quad \text{et} \quad \mu_A = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$$

les factorisations du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de A . Par le lemme des noyaux, on a la décomposition suivante de \mathbb{C}^n en sous-espaces caractéristiques associés à A (vue comme matrice à coefficients complexes) :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^r \ker((A - \lambda_j I_n)^{\alpha_j}).$$

Pour $j \in \{1, \dots, r\}$, posons pour simplifier

$$F_j = \ker((A - \lambda_j I_n)^{\alpha_j})$$

et notons $\pi_j \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ le projecteur sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{k \neq j} F_k$. Pour $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable et $j \in \{1, \dots, r\}$, on pose

$$Y_j = \pi_j \circ Y \quad \text{et} \quad Z_j = e^{-\lambda_j t} Y_j,$$

que l'on voit comme des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n . On a $Y = Y_1 + \dots + Y_n$. De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, la fonction Y_j est dérivable et on a

$$\begin{aligned} Y' = AY &\Leftrightarrow \text{pour tout } j \in \{1, \dots, r\}, Y'_j = AY_j \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } j \in \{1, \dots, r\}, Z'_j = (A - \lambda_j I_n)Z_j. \end{aligned}$$

De plus, dans ce cas, les fonctions Z_1, \dots, Z_n sont de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a $Z_j^{(\alpha_j)} = 0$ car $(A - \lambda_j I_n)|_{F_j}$ est nilpotente d'indice α_j . En particulier, Z_j est un polynôme à coefficients dans F_j de degré $\leq \alpha_j - 1$.

- Supposons A semi-simple, c'est-à-dire A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ou encore, avec les notations précédentes, $N = 0$). Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a $\alpha_j = 1$ et donc F_j est égal au sous-espace propre E_j associé à la valeur propre λ_j de la matrice A vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$.

- On suppose que λ_j est réelle. D'après la Proposition 41, le \mathbb{R} -espace vectoriel $\widetilde{E}_j = \mathbb{R}^n \cap E_j = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda_j X\}$ est de dimension β_j . Si $(V_1^{(j)}, \dots, V_{\beta_j}^{(j)})$ est une (\mathbb{R} -)base de \widetilde{E}_j , on en déduit une famille libre

$$\left\{ e^{\lambda_j t} V_k^{(j)} : 1 \leq k \leq \beta_j \right\}$$

de β_j solutions du système $Y' = AY$ à valeurs dans $\widetilde{E}_j \subset E_j$.

- On suppose que $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $V \in \mathbb{C}^n$. Alors V est vecteur propre pour la valeur propre λ_j si et seulement si \overline{V} est vecteur propre pour la valeur propre $\overline{\lambda_j}$. Soit $(V_1^{(j)}, \dots, V_{\beta_j}^{(j)})$ une base de E_j . On en déduit une famille libre

$$\left\{ \operatorname{Re}(e^{\lambda_j t} V_k^{(j)}) : 1 \leq k \leq \beta_j \right\} \cup \left\{ \operatorname{Im}(e^{\lambda_j t} V_k^{(j)}) : 1 \leq k \leq \beta_j \right\}$$

de $2\beta_j$ solutions du système $Y' = AY$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n \cap (E_j \oplus \overline{E_j})$ associées au couple de valeurs propres $(\lambda_j, \overline{\lambda_j})$.

Par concaténation de ces familles libres, on obtient une base de E .

2. Supposons que A n'est pas semi-simple. Dans ce cas, on n'a pas en général une écriture aussi simple d'une base explicite de E (en raison de la contribution de la matrice nilpotente non nulle N). Dans la pratique, on peut néanmoins déterminer une telle base en utilisant la méthode dite des coefficients indéterminés que l'on détaille ici.

D'après l'analyse ci-dessus, E est contenu dans le \mathbb{C} -espace vectoriel

$$\left\{ \sum_{j=1}^r e^{\lambda_j t} P_j(t) : \forall j \in \{1, \dots, r\}, P_j \text{ est un polynôme à coefficients dans } F_j \text{ de degré } \leq \alpha_j - 1 \right\}.$$

Cela suggère la méthode suivante. Soit $j \in \{1, \dots, r\}$.

- (a) On suppose que λ_j est réelle. On cherche alors des solutions Y de (6) sous la forme $Y(t) = e^{\lambda_j t} P_j(t)$ où P_j est un polynôme de degré $\leq \alpha_j - 1$ (ou encore $\leq \beta_j - 1$ si on ne veut pas calculer le polynôme minimal) à coefficients dans \mathbb{R}^n .
- (b) On suppose que λ_j est complexe non réelle et on pose $\lambda_j = u_j + iv_j$, avec $u_j, v_j \in \mathbb{R}$, $v_j \neq 0$. On cherche alors des solutions Y de (6) sous la forme $Y(t) = e^{u_j t} (P_j(t) \cos(v_j t) + Q_j(t) \sin(v_j t))$ où P_j, Q_j sont des polynômes de degré $\leq \alpha_j - 1$ (ou encore $\leq \beta_j - 1$) à coefficients dans \mathbb{R}^n .

Exercice 16. Pour chacune des matrices A de l'Exercice 9, résoudre le système différentiel $Y' = AY$.

16 Exercices supplémentaires

Exercice 17. Compléter toutes les preuves esquissées ci-dessus.

Exercice 18. Étudier la diagonalisabilité de la matrice de l'Exercice 7 dans le cas où $\text{car}(\mathbb{K}) = 2$.

Exercice 19. Soit $n \geq 1$, et considérons la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que si $\text{car}(\mathbb{K}) \nmid n$ alors A est diagonalisable.
2. Que peut-on dire si $\text{car}(\mathbb{K}) \mid n$?

Exercice 20. Soit $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme ad_M de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ défini par $\text{ad}_M(A) = M \cdot A - A \cdot M$. Montrer que si M est diagonalisable, resp. nilpotente, alors ad_M est diagonalisable, resp. nilpotent. En supposant que χ_M est scindé, en déduire la décomposition de Dunford de ad_M en fonction de celle de M .

Exercice 21. Parmi les endomorphismes de dérivation $P \mapsto P'$, de translation $P(X) \mapsto P(X+1)$, de différentiation finie $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, quels sont ceux qui sont nilpotents ? trigonalisables ?

Exercice 22. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On montre dans cet exercice l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) μ_u et P sont premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$;
- (ii) $P(u) \in \text{GL}(E)$.

1. À l'aide du théorème de Bézout, montrer que (i) \Rightarrow (ii).
2. Réciproquement, on suppose que μ_u et P ne sont pas premiers entre eux et on note $D \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun avec $\deg(D) \geq 1$.
 - (a) Justifier que $D(u)$ n'est pas injectif.
 - (b) En déduire que $P(u)$ n'est pas inversible et l'implication (ii) \Rightarrow (i).
3. Justifier que si les propriétés équivalentes ci-dessus sont satisfaites, on a $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 23. 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont conjuguées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$) alors elles sont conjuguées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire s'il existe une matrice $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBQ^{-1}$).

2. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si toutes ses valeurs propres sont réelles, alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24 (Topologie des espaces de matrices). Soit \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On munit $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ de la distance associée à une norme fixée.

1. Montrer que $\text{GL}_r(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ est une partie ouverte et dense.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que le sous-ensemble de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ formé des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes est une partie dense.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, et soit $\Omega \subset \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ sa classe de conjugaison.
 - (a) Montrer que M est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{\Omega}$.
 - (b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si Ω est fermée dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.
 - (c) On suppose encore que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\Omega}$ est une réunion de classes de conjugaison, et qu'elle contient une unique classe de conjugaison de matrices diagonalisables.

Exercice 25. Montrer que la suite $(n!)_{n \geq 1}$ n'est pas récurrente linéaire.